



Proposition de stage M2 Recherche Opérationnelle

Approximation différentielle par programmation semidéfinie

Encadrants

- Frédéric Roupin, Professeur à l'Institut Galilée, LIPN UMR 7030, Université Paris 13, Frederic.Roupin@lipn.univ-paris13.fr
- Sophie Toulouse, Maître de conférences à l'Institut Galilée, LIPN UMR 7030, Université Paris 13, Sophie.Toulouse@lipn.univ-paris13.fr

Domaines concernés

- Optimisation Combinatoire, Approximation et complexité, Programmation mathématique

Durée-Période

- De quatre à six mois à partir d'avril 2012

Contexte

Les approches par programmation semidéfinie [7] ont ouvert de nouvelles perspectives pour l'étude de certains problèmes combinatoires difficiles [8]. La programmation semidéfinie peut être vue comme une généralisation de la programmation linéaire, et est étroitement liée à certaines relaxations Lagrangiennes [3]. Initié par l'article fondateur de Goemans et Williamson sur l'approximation du problème de la coupe maximale dans un graphe [4], l'usage de la programmation semidéfinie en optimisation combinatoire a permis d'obtenir des résultats remarquables dans le domaine de l'approximation classique, i.e. avec garantie de performance par rapport à la valeur optimale (algorithmes ϵ -approchés). On peut citer en particulier la célèbre fonction θ de Lovàsz (et ses renforcements) utilisée pour l'approximation de `CLIQUE` et du nombre chromatique d'un graphe, et l'algorithme 7/8-approché pour `MAX-3-SAT` de Karloff et Zwick.

Cependant, ces méthodes non-linéaires ont été peu utilisées jusqu'à présent avec d'autres mesures d'approximation. En particulier, dans le cadre de l'approximation différentielle [5], la grande majorité des résultats est issue d'approches principalement combinatoires et algorithmiques. On peut toutefois citer les travaux de Y. Nesterov et Y. Ye [6, 9] portant sur le cas simple d'une fonction quadratique pseudo-booléenne sans contrainte (algorithme $2 - \pi/2 \sim 0.43 - \epsilon$ approché), et des résultats de non-approximabilité utilisant la théorie des systèmes de preuves interactifs de

Bellare et Rogaway [1]. Or, d'une part, la classification des problèmes d'optimisation combinatoire selon leur degré d'approximation différentielle est moins bien connue qu'elle ne l'est pour le rapport classique. D'autre part, la puissance de la programmation semidéfinie en différentiel est encore plus éloquente que dans le cas classique : si les meilleurs algorithmes combinatoires connus pour MaxCut ne garantissent pas mieux qu'un rapport standard de $1/2 + O(1/n)$ (contre $7/8$ par reformulation et relaxation semidéfinie), les meilleurs algorithmes combinatoires connus pour les problèmes booléens tels que Max2Sat ne garantissent en différentiel qu'un rapport de $O(1/n)$ (contre un rapport constant par reformulation et relaxation semidéfinie).

Enjeux

L'enjeu est double : il s'agit non seulement de déterminer des algorithmes permettant de résoudre efficacement des problèmes d'optimisation combinatoire, mais aussi d'affiner la classification des problèmes d'optimisation combinatoire selon leur degré d'approximation différentielle.

L'intérêt porté à la mesure différentielle tient essentiellement en deux aspects, le premier lié à la résolution effective des problèmes, le second à la théorie de la complexité :

- D'un point de vue pratique, la garantie offerte par l'approximation classique n'est pas toujours une garantie de qualité : par exemple, si la pire solution de toute instance d'un problème donné garantit un rapport classique de ε (ex. : l'ensemble des sommets d'un graphe est presque sûrement 2-approché pour MinVC), alors tout algorithme renvoyant une solution réalisable pour ce problème est ε -approché. Parce qu'elle situe la solution approchée, non pas seulement vis-à-vis d'une solution optimale dont la valeur peut être arbitraire, mais sur l'intervalle des valeurs possibles, la mesure différentielle n'induit pas de tel biais.
- Du point de vue de la complexité de résolution, la mesure différentielle rend deux à deux comparables tous les problèmes d'optimisation combinatoire, contrairement à la mesure classique qui offre deux hiérarchies, l'une pour les problèmes de maximisation, l'autre pour les problèmes de minimisation. Dans une hiérarchie dont la vocation est d'indiquer le degré de complexité des problèmes, maximiser par exemple la taille d'un ensemble stable (problème MaxIS, non approximable en classique) devrait être équivalent à minimiser la taille du complémentaire d'un ensemble stable (problème MinVC, 2-approximable en classique). En différentiel, ces problèmes mathématiquement équivalents le sont aussi du point de vue de leur approximation.

La méconnaissance actuelle de la classification différentielle est essentiellement liée à l'exigence de ce rapport, qu'il s'agisse d'établir la qualité d'un algorithme approché ou d'obtenir un résultat par réduction (transformation d'un problème en un autre vérifiant certaines conditions). Dans le premier cas, la solution approchée doit être rendue comparable conjointement à la solution optimale et à la pire solution. Dans le second cas, c'est la répartition des solutions des problèmes réduits l'un à l'autre qui doit être approché. La relaxation définie, lorsqu'elle peut s'appliquer, s'affranchit de ces difficultés, ce qui rend d'autant plus prometteuse la systématisation de cette approche pour l'approximation différentielle.

Sujet

Les objectifs principaux de ce stage sont :

- De **proposer un cadre général** permettant d'exploiter la programmation semidéfinie pour l'approximation différentielle de problèmes d'optimisation combinatoire. Puisque la mesure d'approximation différentielle fait intervenir à la fois la meilleure et la pire des valeurs possibles, l'approche proposée impliquera un travail important de reformulation des problèmes et l'élaboration de nouvelles relaxations.

- D'**appliquer cette approche** à des problèmes particuliers issus de l'optimisation dans les graphes et de la satisfaction d'expressions logiques. Dans cette perspective, il sera essentiel de lier les différentes bornes semidéfinies et les approches purement combinatoires permettant la construction des solutions approchées.

- d'**exploiter numériquement** les nouvelles formulations/relaxations et algorithmes sur des instances réelles. Les preuves d'approximation sont en effet le plus souvent constructives. Comme cela est déjà le cas pour l'approximation standard, les algorithmes et les bornes obtenus pourront être exploités en pratique pour résoudre de manière exacte ou approchée les problèmes combinatoires concernés.

Ce stage (rémunéré) pourra déboucher éventuellement sur une thèse, et se déroulera au laboratoire LIPN de l'Université Paris Nord au sein de l'équipe AOC (Algorithmique et Optimisation Combinatoire).

Références

- [1] M. Bellare et P. Rogaway. "The complexity of approximating a nonlinear program", *Mathematical Programming* 69 :429-441, 1995.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory" Volume 15 of *Studies in SIAM*, 1994.
- [3] C. Lemaréchal. "The omnipresence of Lagrange", *4OR* 1 :7-25, 2003.
- [4] M.X. Goemans et D.P. Williamson. "Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems Using Semidefinite Programming", *Journal of ACM* (42) : 1115-1145, 1995.
- [5] J. Monnot, V. Paschos, et S. Toulouse. "Approximation polynomiale des problèmes NP-difficiles : optima locaux et rapport différentiel", Hermès Science, 2003.
- [6] Y. Nesterov "Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization". *Optimization Methods and Software* 9(1,3) :141-160, 1998.
- [7] S. Poljak, F. Rendl et H. Wolkowicz. "A recipe for semidefinite relaxation for (0,1)-quadratic programming", *J. of Global Opt.* 7 :51-73, 1995.
- [8] F. Roupin. "From Linear to Semidefinite Programming : an Algorithm to obtain Semidefinite Relaxations for Bivalent Quadratic Problems". *Journal of Combinatorial Optimization*, 8(4) :469-493, 2004.
- [9] Y. Ye. "Approximating quadratic programming with bound and quadratic constraints", *Mathematical Programming* 84(2) :219-226, 1999.