Spécification, implantation et preuve d'une technique de résolution de la contrainte de différence alldiff : extension d'un solveur CSP certifié

Proposition

Sujet de stage de Master M2R - 5 à 6 mois

Encadrement : Catherine Dubois, Professeur ENSIIE - Cedric, Sourour Elloumi, maître de conférences ENSIIE-Cedric

Lieu du stage : CNAM Paris ou ENSIIE Evry (en fonction du candidat trouvé)

Sujet

De nombreux problèmes peuvent se mettre sous la forme d'un problème de satisfaction de contraintes (CSP). On trouve des applications dans des domaines très variés comme l'optimisation, la planification, la vérification ou la preuve de programmes ou dans des domaines critiques (détection de collision d'avions par exemple).

Dans de tels systèmes de contraintes, il est souvent nécessaire de spécifier qu'un certain nombre de variables doivent prendre des valeurs différentes. Cette contrainte, notée alldiff(x_1, x_2 ... x_n), est une contrainte dite globale. Par exemple on pourra utiliser cette contrainte globale pour imposer que les 9 cases de chaque carré d'un sudoku doivent prendre des valeurs différentes dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. On peut remplacer cette contrainte par un système de contraintes $x_i \neq x_j$ pour tout i et tout j compris entre 1 et n tels que $i \neq j$ mais on perd alors beaucoup en efficacité.

Dans le cadre des CSP à domaines finis où chaque variable du problème a un ensemble fini de valeurs possibles, il existe des algorithmes spécifiques pour résoudre cette contrainte de différence comme par exemple ceux de Régin [3] et Costa [2] qui font appel à la théorie des graphes, et plus particulièrement aux algorithmes de couplage.

Pouvoir prendre en compte ce type de contraintes est un réel atout car il s'agit notamment d'un exemple de contraintes disjonctives qu'il est très difficile de modéliser par la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) : la seule contrainte $x_i \neq x_j$, et plus généralement, toute contrainte disjonctive (inégalité linéaire 1 'OU' inégalité linéaire 2), nécessite l'introduction d'une nouvelle variable binaire, et se modélise par deux contraintes quadratiques qu'il convient ensuite de linéariser.

Récemment, Catherine Dubois et d'autres chercheurs ont développé un solveur de contraintes à domaines finis certifié. Il a été développé à l'aide de l'assistant à la preuve Coq, il a été démontré correct et complet. Il est décrit dans [1]. Cependant il ne traite que de contraintes binaires.

L'objectif du stage est d'étendre le solveur certifié de manière à pouvoir traiter efficacement les contraintes de la forme alldiff(x_1, x_2 ... x_n). Il s'agira donc de développer en Coq un algorithme de filtrage (celui de Regin par exemple) pour la contrainte de différence alldiff et de prouver en Coq que ce dernier est correct et complet (la correction et la complétude du solveur en découlant).

Un objectif supplémentaire sera de comparer différentes modélisations d'un même problème combinatoire sous la forme d'un CSP d'une part et d'un PLNE d'autre part, en particulier du point de vue de la prise en compte des contraintes disjonctives.

Pré-requis minimaux : programmation fonctionnelle, notions de base en logique et en théorie des graphes.

Ce sujet peut donner lieu à une poursuite en thèse.

References

[1] Matthieu Carlier, Catherine Dubois, Arnaud Gotlieb. A Certified Constraint Solver over Finite Domains. FM 2012, pages 116-131, Paris, 2012

[2] Marie-Christine Costa. Persistency in maximum cardinality bipartite matchings. Operations Research Letters, 15(3), pages 143–149, 1994.

[3] Jean-Charles Régin. A filtering algorithm for constraints of difference in CSPs. In Proceedings 12th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI 94), pages 362–367, 1994.

[4] Coq. voir le site `coq.inria.fr`