



Proposition de stage M2 Recherche Opérationnelle

*Coupes linéaires et non-linéaires en programmation semidéfinie :
application à la résolution exacte du problème du Stable*

Encadrants

- Frédéric Roupin, Professeur des Universités à l'Institut Galilée, LIPN UMR 7030, Université Paris 13, Frederic.Roupin@lipn.univ-paris13.fr
- Mathieu Lacroix, Maître de conférences à l'Institut Galilée, LIPN UMR 7030, Université Paris 13, mathieu.lacroix@lipn.univ-paris13.fr

Domaines concernés

- Optimisation Combinatoire, Programmation semidéfinie, Coupes linéaires et non-linéaires, Algorithme de coupes et branchements

Durée-Période

- De quatre à six mois à partir d'avril 2012

Contexte

Initialement considérée comme une approche efficace pour l'obtention de bornes de grande qualité et outil de preuve majeur en approximation polynomiale [4], la programmation semidéfinie (SDP) [12] a permis récemment d'obtenir des algorithmes efficaces dans le cadre de la résolution exacte de problèmes combinatoires difficiles, par exemple pour la recherche d'une coupe maximale dans un graphe [13] ou d'un sous-graphe dense [10]. Ce nouveau champ d'application a été ouvert grâce aux progrès majeurs d'algorithmes spécifiques de résolution numérique [1, 6] et également à l'élaboration de nouveaux modèles semidéfinis [11].

Dans ce cadre, plusieurs auteurs ont cherché d'une part à étendre [7, 8] les approches par plans coupants utilisés avec succès en programmation linéaire [5, 9], et d'autre part

à déterminer de nouvelles classes de coupes rendues accessibles grâce au caractère non-linéaire de la programmation semidéfinie [2, 3].

Sujet

Le but de ce stage est de poursuivre les travaux déjà réalisés sur des algorithmes de coupes et branchements utilisant des relaxations SDP. Le travail durant ce stage se focalisera sur le problème classique du stable dans un graphe. Les bornes SDP pour ce problème étant de grande qualité, l'ajout de coupes devrait permettre la résolution efficace d'instances de grande taille. Les objectifs sont les suivants :

- **Un travail de synthèse et d'état de l'art** sera effectué concernant les différentes méthodes de coupes et branchements développées pour la résolution du problème du stable. Une attention particulière sera portée sur les contraintes valides pour ce problème. Cet état de l'art portera également sur les méthodes de résolution du problème du stable utilisant la SDP et les bornes associées et comparera ces deux types d'approches.

- **Un algorithme de coupes et branchements utilisant la SDP** sera implémenté pour résoudre le problème. Les contraintes utilisées pour renforcer la relaxation SDP seront basées sur les contraintes utilisées pour la programmation linéaire (contraintes de clique, de chemin impair, etc). Cet algorithme servira de support à une étude expérimentale. Elle permettra de déterminer l'impact pratique du renforcement d'une relaxation SDP par des coupes.

- **Un travail théorique** sera effectué en parallèle de la partie expérimentale. Celui-ci consistera notamment à déterminer de nouvelles contraintes valides (linéaires ou non-linéaires) pour le problème du stable. Des algorithmes de séparation spécifiques seront développés pour ces nouvelles inégalités.

Ce stage (rémunéré) pourra déboucher éventuellement sur une thèse, et se déroulera au laboratoire LIPN de l'Université Paris Nord au sein de l'équipe AOC (Algorithmique et Optimisation Combinatoire).

Références

- [1] B. Borchers. "CSDP, A C library for semidefinite programming", Optimization Methods and Software 11(1) pp. 613-623, 1999.
- [2] M.T. Çezik et G. Iyengar. "Cuts for mixed 0-1 conic programming", Mathematical Programming 104(1) pp. 179-202, 2005.
- [3] B.M.P. Fraticelli. "Semidefinite Cuts and Partial Convexification Techniques with Applications to Continuous Nonconvex Optimization, Stochastic Integer Programming,

- and Facility Layout Problems", PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg Virginia, 2001.
- [4] M.X. Goemans et D.P. Williamson. "Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems Using Semidefinite Programming", *Journal of ACM* (42) : 1115-1145, 1995.
 - [5] G. Gutin et A.P. Punnen, "The traveling Salesman Problem and its variations", *Combinatorial Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
 - [6] C. Helmberg. "The ConicBundle Library for Convex Optimization", <http://www-user.tu-chemnitz.de/~helmberg/ConicBundle/>, 2011.
 - [7] C. Helmberg et F. Rendl. "Solving quadratic (0,1)-problems by semidefinite programs and cutting planes", *Mathematical Programming* 82 pp. 291-315, 1998.
 - [8] A.N. Letchford et M.M. Sørensen. "Binary positive semidefinite matrices and associated integer polytopes", *Math. Program.*, 131(1), 253-271, 2012.
 - [9] A.R. Mahjoub, "Polyhedral Approaches", in *Concepts of Combinatorial Optimization*, V. Paschos (Ed.) pp. 261-324, 2010.
 - [10] J. Malick et F. Roupin. "Solving k-cluster problems to optimality using adjustable semidefinite programming bounds", à paraître dans *Mathematical Programming B*, special issue on Mixed-Integer Nonlinear Programming, available online as preprint hal-00609744, 2010.
 - [11] J. Malick et F. Roupin. "On the bridge between combinatorial optimization and non-linear optimization : a family of semidefinite bounds leading to Newton-like methods", à paraître dans *Mathematical Programming*, available online as preprint hal-00662367, 2011.
 - [12] S. Poljak, F. Rendl et H. Wolkowicz. "A recipe for semidefinite relaxation for (0,1)-quadratic programming", *J. of Global Opt.* 7 :51-73, 1995.
 - [13] F. Rendl, G. Rinaldi, et A. Wiegele. "Solving Max-Cut to optimality by intersecting semidefinite and polyhedral relaxations", *Mathematical Programming* 121 , pp. 307-335, 2010.