

## *Proposition de Stage de Master*

### **Partitionnement de graphes avec contraintes de capacité**

Encadrant principal : Viet Hung Nguyen, LIP6, Université Pierre et Marie Curie

Email : *Hung.Nguyen@lip6.fr*

Co-encadrants: Pierre Bonami, LIF, Université Aix-Marseille

Michel Minoux, LIP6, Université Pierre et Marie Curie

#### **Introduction**

Le stage proposé s'inscrit dans un projet de recherche sur le partitionnement de graphes et ses applications financé par le programme PGMO de la Fondation Mathématique Jacques Hadamard (FMJH).

Le problème de partitionnement des graphes a des applications dans des domaines très divers comme la conception des réseaux optiques dans les télécommunications, la conception des circuits électroniques, la résolution de grandes systèmes linéaires creux, ...etc.

Etant donné un graphe où les arêtes sont pondérées par des coûts, le problème de *partitionnement de graphes* consiste à trouver une partition de l'ensemble des nœuds du graphe en sous-ensembles de façon à :

- minimiser le coût des arêtes dans l'interconnexion.
- respecter des contraintes bornant la cardinalité ou assurant un certain équilibre des sous-ensembles.

Nous considérons ici une nouvelle variante du problème où l'on impose sur les sous-ensembles dans la partition des contraintes supplémentaires de capacité. La capacité d'un sous-ensemble peut être définie de plusieurs façons différentes. Par exemple, elle peut être égale à

- a) la somme des coûts des arêtes à l'intérieur du sous-ensemble plus ceux des arêtes du sous-ensemble vers l'extérieur,
- b) ou tout simplement la somme des coûts des arêtes du sous-ensemble vers l'extérieur.

La contrainte de capacité exige que chaque sous ensemble de la partition cherchée ait une capacité bornée par une constante donnée.

#### **Convexification/Linéarisation des modèles de programmation mathématique**

Il existe deux principaux modèles de programmation linéaire pour le problème de partitionnement des graphes : le premier modélise la relation Nœud/Nœud et le second exprime la relation Nœud/Partition. L'introduction des contraintes de capacité dans ces modèles modifie de façon importante leurs propriétés mathématiques. En effet, ces contraintes sont quadratiques et souvent non convexes, les modèles deviennent tous quadratiques non convexes. De plus, les techniques pour résoudre des modèles quadratiques du problème classique de partitionnement de graphe comme l'optimisation spectrale ou la programmation sémi-définie ne s'appliquent plus. Il est donc nécessaire d'établir les bases théoriques pour la résolution de ces nouveaux modèles, en particulier, les méthodes de convexification/linéarisation du modèle.

Une des méthodes classiques de linéarisation des fonctions pseudo-booléennes est la méthode de Reformulation et Linéarisation (RLT) proposée par Sherali et Adams dans les années 90s. L'inconvénient de la méthode RLT est qu'elle ajoute beaucoup de variables 0/1 (une pour chaque produit de variables 0/1) et de contraintes au modèle original ce qui rend la résolution assez peu efficace. Nous avons essayé de surmonter ce problème en proposant une méthode de Convexification par Projection (MCP) [1], [2] qui permet de ne pas ajouter de

variables supplémentaires et de générer des inégalités linéaires violées par la solution optimale actuelle de la relaxation continue si celle-ci viole des contraintes de capacité. Nous avons notamment montré que MCP est équivalent en théorie à RLT pour les modèles Nœud/Nœud et Nœud/Partition et en plus est en moyenne 10 fois plus rapide que cette dernière en pratique [3].

### Contenu du stage

Le stage vise à améliorer la qualité de la relaxation linéaire obtenue dans [3]. En effet, nous avons identifié quelques contraintes simples pour renforcer le modèle RLT et nous aimerions étendre MCP à ce modèle RLT renforcé. Autrement dit, nous voudrions pouvoir générer des inégalités linéaires plus riches que celles expérimentées et qui sont équivalentes à notre modèle RLT renforcée. L'objectif du stage est donc de mettre en évidence cette MCP étendue et de faire des expériences numériques prouvant son efficacité.

### Environnement de travail et rémunération

La durée du stage peut varier entre 3 et 6 mois et la date de début est selon la disponibilité du candidat sélectionné mais de préférence avant le 1<sup>er</sup> Juin 2013. Le stage s'effectuera au LIP6, Université Pierre et Marie Curie. La partie expérimentation du stage se fera en C++ avec CPLEX comme l'outil principal. Il existe déjà un programme C++ pour les expérimentations dans [3] qui peut être réutilisé.

La rémunération est d'environ 700€ nets par mois.

### Critères de sélection

Les compétences attendues sont notamment de bonnes connaissances en base en mathématique (algèbre linéaire, programmation linéaire, ...) et en programmation informatique (C++).

### Perspectives à l'issue du stage

Le candidat aura acquis une compétence en matière de la résolution exacte des programmes non-linéaires en nombres entiers dont le domaine applicatif est très vaste.

L'obtention de résultats de qualité au terme de ce stage ouvrira des possibilités de poursuivre en thèse financée par une collaboration soit avec le CEA-Saclay, soit avec EDF.

### Références

- [1] A. Saxena, P. Bonami and J. Lee. *Convex Relaxations of Non-Convex Mixed Integer Quadratically Constrained Programs: Extended Formulations*. Math. Programming B, [124: 383-411, 2010](#). (version courte IPCO 2008)
- [2] A. Saxena, P. Bonami and J. Lee. *Convex Relaxations of Non-Convex Mixed Integer Quadratically Constrained Programs: Projected Formulations*. Math. Programming A, [130\(2\): 359-413, 2011](#).
- [3] Pierre Bonami, Viet Hung Nguyen, Michel Klein, and Michel Minoux. *On the solution of a graph partitioning problem under capacity constraints*, Proceedings of ISCO 2012, vol. 7422, LNCS, pp. 285-296 (2012)