

# Sparse dictionary learning by quadratic programming

– sujet de stage M2 ou 3ème année ingénieur–

Le codage parcimonieux (ou le “sparse dictionary learning”) est une méthode d’apprentissage de type “representation learning”. Dans sa forme la plus simple, le but est de transcrire une image fournie en entrée comme une somme pondérée de plusieurs motifs élémentaires. Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  l’entrée vectorielle qui représente une image de  $d$  pixels. Si nous disposons d’un dictionnaire  $D \in \mathbb{R}^{d \times n}$  de  $n$  motifs élémentaires, l’objectif est de trouver une représentation parcimonieuse  $r_1, r_2, \dots, r_n$  telle que  $\mathbf{x} \simeq \sum_{i=1}^n r_i D_i$ , où  $D_i$  est la colonne  $i$  de  $D$  (le motif élémentaire  $i$ ). Pour trouver la somme pondérée  $\sum_{i=1}^n r_i D_i$  la plus proche de  $\mathbf{x}$ , on peut définir un problème d’optimisation qui minimise la norme euclidienne au carré :  $\min \|\mathbf{x} - \sum_{i=1}^n r_i D_i\|_2^2$ .

Il existe en fait plusieurs variations de cet objectif, par exemple pour intégrer le but de minimiser le nombre de valeurs  $r_i$  non-nulles (objectif de parcimonie). Le plus souvent, la formulation est un problème d’optimisation quadratique. Si on fait rentrer le dictionnaire  $D$  dans les variables de décision, on peut aussi formuler l’objectif comme un polynome de degré 4 (qui pourrait être quadratisé). Notre équipe travaille depuis plusieurs années en programmation quadratique et polynomiale [1, 2, 3] et cette expertise sera utilisée pour résoudre ce problème.

Le codage parcimonieux a de nombreuses applications comme le « débruitage d’image » (*image denoising*) qui consiste à réparer une image qui aurait été détériorée par compression, par exemple. La figure (en bas) à droite montre un exemple de résultat, tiré de la fiche wikipedia de “sparse dictionary learning”. On renvoie le lecteur vers [4] pour une formulation du problème en problème quadratique en variables mixtes.



Nous avons développé un algorithme de résolution de problèmes quadratique (QP) en variables mixtes ayant des variables binaires, appelé MIQCR (Mixed Integer Quadratic Convex Reformulation) [1]. Cet algorithme fonctionne en 2 phases. Dans la première, nous convexifions le problème en perturbant la fonction objectif, puis nous calculons une relaxation convexe (QP\*) fournissant une borne serrée en utilisant la programmation semi-définie. La deuxième phase consiste à résoudre le problème initial par un branch-and-bound spatial basée sur (QP\*).

Le travail à effectuer sera à la fois théorique et expérimental. La partie théorique portera sur une amélioration de la deuxième phase de l’algorithme en s’autorisant à recalculer régulièrement la relaxation (QP\*) au cours de l’algorithme. La principale difficulté apparaissant réside dans le temps de calcul pour résoudre un programme semi-défini à chaque noeud du branch-and-bound ; on va utiliser une heuristique basée sur le principe de la “conic bundle” [2]. Le travail expérimental consistera à implanter cette méthode sur le problème de codage parcimonieux.

**Connaissances requises :** Cours de programmation mathématique, Connaissance d’un langage quelconque de programmation

## Encadrants :

Amélie Lambert, MCF HDR, amelie.lambert@cnam.fr

Daniel Porumbel, MCF, daniel.porumbel@cnam.fr

Lieu : CEDRIC-Cnam (Paris)

Durée : 6 mois

Poursuite en thèse possible : oui

## Références

- [1] A. BILLIONNET, S. ELLOUMI, A. LAMBERT. Exact quadratic convex reformulations of mixed-integer quadratically constrained problems. *Mathematical Programming* 158 (2016)

- [2] A. BILLIONNET, S. ELLOUMI, A. LAMBERT, A. WIEGELE. Using a Conic Bundle method to accelerate both phases of a Quadratic Convex Reformulation. *INFORMS Journal on Computing* 29 (2017)
- [3] A. LAMBERT. Exact solutions of polynomial programs through quadratic convex reformulations : theory and applications *Habilitation à diriger la recherche* (2021)
- [4] L. YUAN, STÉPHANE CANU, P. HONEINE, S. RUAN., Mixed integer programming for sparse coding : Application to image denoising. *IEEE Transactions on Computational Imaging* (2019)