Proposition de sujet de stage - M2 ou 3ème année ingénieur

Titre : Résolution du problème du positionnement multidimensionnel, approche par sous-estimateur convexe.

Contexte scientifique : Le positionnement multidimensionnel (MultiDimensional Scaling (MDS)) est un ensemble de techniques statistiques utilisées dans le domaine de la visualisation d'information pour explorer les similarités dans les données. Typiquement, un algorithme de positionnement multidimensionnel part d'une matrice de similarité entre n points (ici la distance euclidienne) pour affecter à chaque point une position dans un espace à m dimensions. Dans le cas où $m = 2$ ou 3, les positions peuvent être visualisées sur un plan ou dans un volume par un nuage de points.

Plus formellement, étant donné n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans un espace de dimension p, le positionnement multidimensionnel consiste à représenter ces points dans un espace de dimension $m < p$ par n nouveaux points $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de dimensions m, en conservant les proximités. On se donne pour cela une matrice de distances D qui peut être définie par la distance euclidienne $d_{ij} = ||x_i - x_j||_2$, et il faut déterminer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui minimisent une fonction de coût $f(x)$, en résolvant (P) :

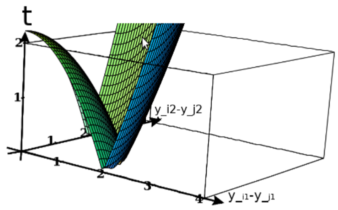
$$(P)\left\{ \min_{y} \quad f(x) = \sum_{i \neq j} \left(d_{ij}^2 - ||y_i - y_j||^2\right)^2 \right.$$

Le problème (P) consiste à minimiser un polynôme de degré 4. Il est possible de reformuler (P) de manière équivalente par le problème (P') :

$$(P')\left\{ \min_{y} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \quad \max \quad \left\{d_{ij}^2 - ||y_i - y_j||^2, ||y_i - y_j||^2 - d_{ij}^2\right\} \right.$$

Pour résoudre ce problème nous proposons de le réécrire en minimisant l'écart maximal sur toutes les paires de points (i, j). On obtient la modélisation (QP) dont les contraintes sont quadratiques et la fonction objectif linéaire :

$$(QP)\begin{cases} \min t \\ t \geqslant d_{ij}^2 - ||y_i - y_j||^2 & \forall (i,j) \in \mathcal{I} \\ t \geqslant ||y_i - y_j||^2 - d_{ij}^2 & \forall (i,j) \in \mathcal{I} \end{cases}$$



Exemple de représentation graphique de la fonction à minimiser en dimension 2, pour deux points avec $d_{ij}^2 = 3.7$.

Objectifs du stage : Le but de ce stage est de résoudre (QP) avec un algorithme de coupes quadratiques. Cette approche peut être vue comme une extension de la méthode des plans coupants au cas de coupes quadratique. Plus précisément, elle consiste à sous-estimer chaque contrainte quadratique non-convexe par des hypersurfaces quadratiques convexes de plus en plus serrées. La Figure 2 illustre la sous estimation d'une fonction quadratique $f(x)$ par trois hypersurfaces quadratiques convexes.

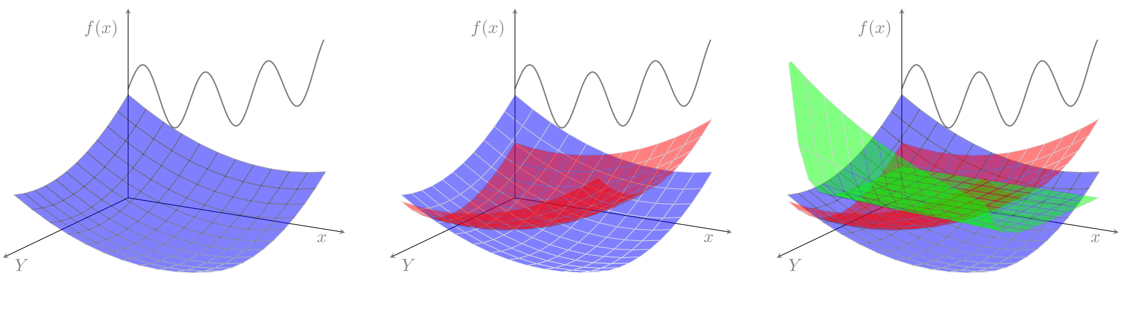


FIGURE 1 – Illustration d'un algorithme de coupes quadratiques convexes.

Les missions du stage sont les suivantes :

1. Tester la résolution exacte de (QP) avec un algorithme de coupes quadratiques.
2. Améliorer la résolution exacte de (QP) en élaborant un algorithme qui tire profit de la structure creuse des contrainte du problème.
3. Mettre en oeuvre les algorithmes de résolution proposés.

Ainsi , le travail à effectuer sera à la fois théorique et expérimental. La partie théorique portera sur l'étude de nouveaux algorithmes et le travail expérimental consistera à les implanter.

Connaissances requises : Cours de programmation mathématique, Connaissance d'un langage quelconque de programmation.

Encadrants :
Amélie Lambert, MCF HDR, `amelie.lambert@cnam.fr`
Daniel Porumbel, MCF, `daniel.porumbel@cnam.fr`
Lieu : CEDRIC-Cnam (Paris-3ème)
Durée : 6 mois
Poursuite en thèse possible : oui