

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Simulations numériques de la multidiffusion acoustique en conduit, comparaison avec des modèles analytiques

Eric Lunéville¹, Jean-François Mercier¹

¹ Laboratoire POEMS, UMR 7231 CNRS/ENSTA/INRIA, ENSTA, 32, Boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France

Nous nous intéressons à la caractérisation des effets de multi-diffusion dans les guides d'ondes. Nous considérons la propagation acoustique en régime harmonique dans un conduit horizontal 2D à parois rigides. Nous avons développé une approche numérique pour déterminer les propriétés effectives d'un milieu hétérogène aléatoire dans un conduit. A l'aide de simulations directes nous déterminons un champ cohérent en faisant la moyenne des champs sur de nombreuses réalisations différentes de désordre. En interprétant ce champ cohérent comme une onde se propageant dans un milieu homogène équivalent, les propriétés effectives de ce milieu sont extraites. Une comparaison avec des modèles analytiques de la littérature, développés en milieu infini et non en conduit, est effectuée.

Une méthode d'éléments finis a été choisie pour permettre de traiter des diffuseurs de formes arbitraires. Afin de réduire le nombre d'inconnues et donc les temps de calcul, la méthode des éléments finis est couplée à une représentation intégrale du champ diffracté. On obtient une réduction supplémentaire en considérant, non pas des configurations de diffuseurs complètement aléatoires, mais des configurations périodiques perturbées : les diffuseurs sont placés sur un réseau de référence périodique puis sont déplacés localement aléatoirement. Ceci permet de paralléliser les calculs, en divisant le domaine de calcul en tranches verticales. Pour chaque tranche, la matrice de diffusion est calculée. Enfin, la matrice de diffusion de la couche entière est obtenue par la combinaison des matrices de diffusion.

Les calculs de transmissions effectives et de nombres d'ondes effectifs montrent un bon accord avec plusieurs modèles analytiques, sauf pour certaines fréquences, les fréquences de bandes interdites des réseaux périodiques sous-jacents. Dans ce cas, le réseau périodique perturbé se comporte en moyenne comme un réseau périodique.

1 Introduction

Il existe divers modèles analytiques permettant de caractériser de façon simple un milieu fortement hétérogène. Ces modèles, comme notamment le modèle de Foldy [1], donnent en régime harmonique les caractéristiques d'un milieu homogène équivalent. La méthodologie pour obtenir ces formules ne permet pas de quantifier les gammes de paramètres pour lesquelles elles s'appliquent. Notre but est de tester la validité de ces formules. Ce travail s'inscrit dans la lignée de nombreuses études diverses sur ce thème, numériques par différences finies [2] ou éléments finis [3, 4] ou méthode des multi-pôles [5], expérimentales [6] ou semi-analytiques [7, 8].

Nous nous plaçons dans un guide (Fig. 1) : le confinement unidirectionnel de l'énergie et la décomposition modale permettent alors d'analyser facilement les transferts d'énergie dans la zone multi-diffusante ainsi que d'accéder aux caractéristiques moyennes de la zone. Nous allons tester la validité de modèles analytiques dans un guide, ceux-ci étant initialement obtenus dans l'espace libre.

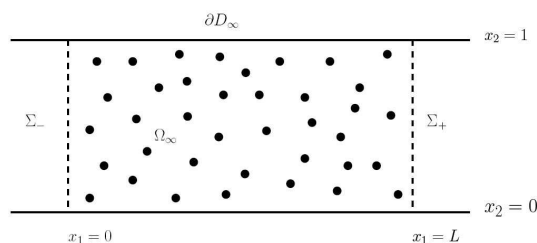


FIG. 1 – Géométrie du problème

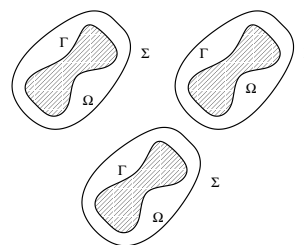


FIG. 2 – Noms des domaines

2 Procédure numérique

En régime harmonique de pulsation ω (dépendance $e^{-i\omega t}$ en temps), la pression totale s'écrit $P = p_{inc} + p$ où p_{inc} est l'onde incidente et le champ diffracté p satisfait

(voir Fig. 2 pour la définition des domaines) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Delta + k^2) p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}} & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \partial D_\infty. \end{array} \right. \quad (1)$$

$k = \omega/c$ sera appelée la fréquence et \mathbf{n} est la normale sortante. Sur les frontières artificielles Σ , afin de sélectionner les ondes sortantes on construit une condition aux limites à partir de la représentation intégrale du champ diffracté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \right) p(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \right) \int_\Gamma \left(p(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} \right. \\ \left. + \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\Gamma_y, \end{array} \right.$$

où $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est la fonction de Green du guide. Ceci est l'étape pénalisante de notre méthode car $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ s'exprime comme une série convergeant lentement ce qui nécessite des temps de calculs non négligeables. Plus de détail sur la méthode numérique à base d'éléments finis peuvent être trouvés dans [9].

Nous considérons un guide de hauteur $H = 1$ et nous plaçons $N_s = 50$ diffuseurs dans une portion de longueur $L = 2$. On introduit Φ la densité surfacique de diffuseurs. Si ce sont des disques, ils ont pour rayon $a = \sqrt{\Phi H L / N_s \pi}$. Une disposition complètement aléatoire des diffuseurs (voir Fig. 3) conduisant à des temps de calculs trop élevés pour pouvoir étudier l'influence de divers paramètres, longueur d'onde incidente et densité de diffuseurs en particulier, nous avons préféré une disposition périodique perturbée. Elle consiste à découper

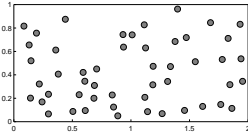


FIG. 3 – Répartition aléatoire $\phi = 5\%$

le rectangle $H \times L$ en N_s carrés (de côté $d = 0.2$) et de disposer aléatoirement un diffuseur par carré (Fig. 4). L'avantage est qu'on peut paralléliser les calculs et que

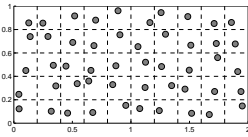


FIG. 4 – Répartition périodique perturbée $\phi = 5\%$

chacun des sous-calculs est beaucoup plus rapide. Pour chacune des dix tranches de cinq diffuseurs on calcule la matrice de transfert. Le calcul direct de la matrice pour

les 50 diffuseurs prendrait de l'ordre de $(50/5)^2 = 100$ fois plus de temps. Puis en combinant de façon appropriée ces matrices on déduit la matrice de transfert de la couche entière de diffuseurs. Le désavantage est qu'on obtient une répartition de diffuseurs dont le caractère aléatoire est atténué par la périodicité de l'arrangement. Pour quantifier le désordre, on utilise la fonction RDF (Radial Distribution Function [10]) g , définie telle que $n_0 g(r)$ soit la densité locale moyenne à la distance r d'un diffuseur où $n_0 = N_s / (HL)$ est la densité totale de diffuseurs. Pour une densité surfacique $\Phi = n_0 \pi a^2 = 0.01$ et une répartition aléatoire des diffuseurs, la RDF est nulle tant que r est plus petite que la distance d'exclusion entre diffuseurs (notre méthode pour générer un maillage éléments finis conduit à une distance $3a$) puis atteint rapidement la valeur asymptotique 1 (Fig. 5). Pour une répartition périodique perturbée de même

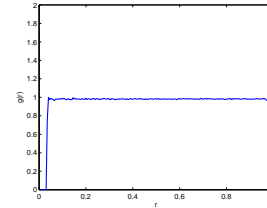


FIG. 5 – RDF pour une répartition aléatoire $\phi = 1\%$

densité (Fig. 6), la RDF oscille en phase avec la RDF d'une répartition purement périodique, correspondant à des pics localisés en des valeurs discrètes de la distance r . Les oscillations sont suffisamment faibles pour qu'on puisse considérer que la répartition est aléatoire. Plus la

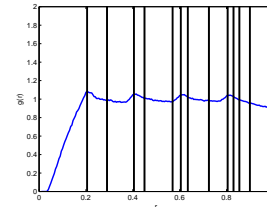


FIG. 6 – RDF pour une répartition périodique perturbée $\phi = 1\%$

densité est grande, plus l'influence du réseau périodique sous-jacent se fait ressentir. Dès une densité de 5% la répartition ne peut plus être considérée très proche d'un aléatoire complet (cas $\Phi = 0.05$ en Fig. 7)

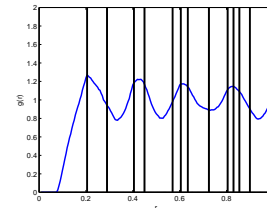


FIG. 7 – RDF pour une répartition périodique perturbée $\phi = 5\%$

Le champ incident est le mode plan $p_{inc}(\mathbf{x}) = e^{ikx_1}$. Pour chaque configuration $j = 1$ to N_c on détermine autour des diffuseurs le champ diffracté p_j . Puis on déduit

les champs p_j^+/p_j^- se propageant en aval/amont de la zone diffusante en déterminant leurs décompositions modales :

$$p_j^\pm(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\pm,j} e^{\pm i\beta_n(x_1 \mp L/2)} \theta_n(x_2),$$

pour $\pm(x_1 \mp L/2) \leq 0$. Les modes du guide sont définis par $e^{\pm i\beta_n x_1} \theta_n(x_2)$ où $\beta_n = \sqrt{k^2 - (n\pi)^2}$ pour $n < k/\pi$ et $\beta_n = i\sqrt{(n\pi)^2 - k^2}$ pour $n > k/\pi$ et $\theta_n(x_2) = \sqrt{2} \cos(n\pi x_2)$ ($\theta_0(x_2) = 1$).

3 Analyse des transferts d'énergie

De façon générale le flux de $p(x_1, x_2)$ à travers la section transverse du guide σ est défini par

$$\Phi(p) = \Im m \left(\int_{\sigma} \left(\bar{p} \frac{\partial p}{\partial x_1} - p \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \right) dx_2 \right).$$

L'énergie de l'onde incidente est $2k$. Les énergies réfléchi et transmise par la configuration j , évaluées en $\sigma = \Sigma^\mp$, sont :

$$\begin{cases} R_j &= \sum_{n=0}^N \frac{\beta_n |a_n^-,j|^2}{k}, \\ T_j &= \sum_{n=0}^N \frac{\beta_n |a_n^+,j|^2}{k}. \end{cases}$$

Les énergies moyennes réfléchi et transmise sont naturellement définie par :

$$\begin{cases} \langle R \rangle &= \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} R_j = \sum_{n=0}^N \frac{\beta_n \langle |a_n^-|^2 \rangle}{k}, \\ \langle T \rangle &= \sum_{n=0}^N \frac{\beta_n \langle |a_n^+|^2 \rangle}{k}. \end{cases}$$

La conservation de l'énergie pour chaque configuration $R_j + T_j = 1$ implique la conservation des énergies moyennes $\langle R \rangle + \langle T \rangle = 1$. Pour l'exemple d'une fréquence $k = 45$, pour laquelle il existe 15 modes propagatifs dans le guide, comme on pouvait s'y attendre on observe que la transmission moyenne est totale pour les petites densité et décroît lorsque la densité croît (Fig. 8 (a)). Il est intéressant de déterminer comment

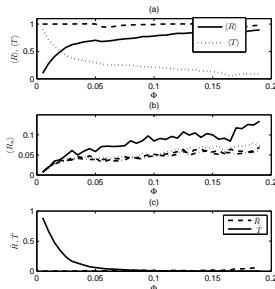


FIG. 8 – Bilans d'énergie $k = 45$

l'énergie se répartit sur les différents modes. L'écriture $\langle R \rangle = \sum_{n=0}^N \langle R_n \rangle$ où $\langle R_n \rangle = \beta_n \langle |a_n^-|^2 \rangle / k$ donne naturellement cette décomposition. L'analyse des coefficients

$\langle R_n \rangle$ montre qu'en réflexion moyenne tous les modes sont représentés : le mode plan est le plus réfléchi (il représente 20% de l'énergie réfléchi en $\Phi = 0.2$) et la contribution des autres modes est de l'ordre de 5% (Fig. 8 (b)). En transmission la situation est différente : essentiellement le mode plan est transmis, les autres modes contribuent peu à l'énergie moyenne transmise.

Les modèles analytiques pour la multi-diffusion considère le champ moyen :

$$\langle p^\pm \rangle(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n^\pm \rangle e^{\pm i\beta_n(x_1 \mp L/2)} \theta_n(x_2),$$

pour $\pm(x_1 \mp L/2) \leq 0$. On associe naturellement le flux du champ moyen

$$\bar{\Phi}(p) = \Im m \left(\int_{\sigma} \left(\overline{\langle p \rangle} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_1} - \langle p \rangle \frac{\partial \overline{\langle p \rangle}}{\partial x_1} \right) dx_2 \right),$$

qui donne accès aux énergies du champ moyen réfléchi et transmise :

$$\begin{cases} \bar{R} &= \sum_{n=0}^N \frac{\beta_n \langle |a_n^+|^2 \rangle}{k}, \\ \bar{T} &= \sum_{n=0}^N \frac{\beta_n \langle |a_n^-|^2 \rangle}{k}. \end{cases}$$

On obtient numériquement que $\bar{R} \simeq 0$, même lorsque $\langle R \rangle$ est grand, et on n'a plus conservation de l'énergie : $\bar{R} + \bar{T} \leq 1$ (Fig. 8 (c)). Ceci signifie que le champ réfléchi est totalement incohérent ce qui donne une contribution nulle après moyennage. En transmission nous avons obtenu que seule la contribution du mode plan ne disparaît pas après moyennage. Nous montrerons même plus tard que cette contribution est totalement cohérente et se conserve entièrement après moyennage.

Un point important de cette analyse est que nous obtenons que le champ moyen est purement plan, comme cela est supposé dans les modèles analytiques : $\langle p^\pm \rangle(\mathbf{x}) \simeq \langle a_0^\pm \rangle e^{\pm ik(x_1 \mp L/2)}$ pour $\pm(x_1 \mp L/2) \leq 0$.

4 Paramètres effectifs et comparaison à des modèles analytiques

Nous avons utilisé deux modèles analytiques de nombres d'onde effectifs, de Foldy [1] et de Linton et Martin [11] :

$$\begin{cases} k_{foldy}^2 &= k^2 + \delta_1 n_0, \\ k_{LM}^2 &= k^2 + \delta_1 n_0 + \delta_2 n_0^2. \end{cases}$$

Ces formules sont obtenues pour des faibles densités ($n_0 a^2 \ll 1$ ou de façon équivalente $a \ll d$ où d est la distance moyenne entre diffuseurs, 0.2 pour nous) et pour des petites valeurs de n_0/k^2 (ou $\lambda \ll d$). Nos simulations numériques sont effectuées dans les conditions $a \ll \lambda$ et $a \ll d$, mais pas $\lambda \ll d$: nous avons balayé la large gamme $\lambda/d = 0.5$ à 63. Au premier ordre en n_0 les deux formules analytiques coïncident. Les valeurs des constantes [11] sont $\delta_1 = 4i \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n$ et $\delta_2 = 4\pi i b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} Z_n Z_s d_{s-n}(kb)$ où

$Z_n = J'_n(ka)/H'_n(ka)$, $d_n(x) = J'_n(x)H'_n(x) + [1 - (n/x)^2]J_n(x)H_n(x)$ où b est la distance d'exclusion ($b = 3a$ pour nous).

Pour déterminer le nombre d'onde effectif de nos expériences numériques, nous avons supposé, comme il est usuel en multi-diffusion, que le milieu diffusif pouvait être remplacé par un milieu homogène (Fig. 9). On

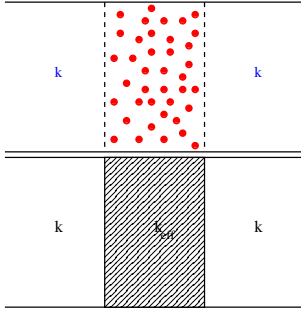


FIG. 9 – Milieu réel-milieu équivalent

cherche donc un champ moyen qui s'écrit :

$$\begin{aligned} p_-(\mathbf{x}) &= e^{ik(x_1+L/2)} + re^{-ik(x_1+L/2)} \quad \text{pour } x_1 < -\frac{L}{2}, \\ p(\mathbf{x}) &= Ae^{ik_{eff}x_1} + Be^{-ik_{eff}x_1} \quad \text{pour } -\frac{L}{2} < x_1 < \frac{L}{2}, \\ p_+(\mathbf{x}) &= te^{ik(x_1-L/2)} \quad \text{pour } x_1 > \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

et qui satisfait les conditions de continuité :

$$\begin{cases} p_{\pm}(\pm L/2) = p(\pm L/2), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\pm}}{\partial x_1}(\pm L/2) = \frac{1}{\rho_{eff}} \frac{\partial p}{\partial x_1}(\pm L/2). \end{cases}$$

k et ρ sont des quantités connues, associées au fluide baignant les diffuseurs. Les expériences numériques donnent les amplitudes réfléchie $r = \langle a_0^- \rangle$ et transmise $t = \langle a_0^+ \rangle$. Les quantités A , B , k_{eff} et ρ_{eff} sont inconnues. En introduisant les paramètres :

$$\tau = \frac{k}{k_{eff}} \frac{\rho_{eff}}{\rho} \quad \text{et} \quad u = \frac{1 + \tau}{1 - \tau},$$

et en éliminant A and B on trouve :

$$\begin{cases} r + u = te^{-ik_{eff}L}u, \\ 1 + ru = te^{ik_{eff}L}. \end{cases} \quad (2)$$

L'élimination de u dans Eq. 2 conduit à $2t \cos(k_{eff}L) = 1 + t^2 - r^2$ (on remarque que k_{eff} est indépendant de ρ_{eff}) ce qui donne le nombre d'onde effectif numérique :

$$k_{eff}L = \pm \arccos \left[\frac{1 + t^2 - r^2}{2t} \right] + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Le signe est choisi tel que $\Im m(k_{eff}) > 0$ (l'amplitude de l'onde cohérente doit décroître) et l'entier n tel que k_{eff} est proche de k (au moins pour les petites densités). Pour $k = 45$ la comparaison de k_{eff} à k_{foidy} et k_{LM} montre un bon accord pour des densités inférieures à 10%. Au delà de 10% l'atténuation obtenue numériquement est plus forte que celle prédite par les modèles analytiques (Fig. 10). Cette dernière remarque n'est pas valable pour toutes les fréquences. Ainsi pour

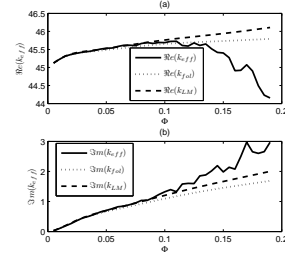


FIG. 10 – k_{eff} en fonction de la densité pour $k = 45$

$\Phi = 0.12$ (Fig. 11) l'atténuation obtenue numériquement est moins forte que celle prédite par les modèles analytiques pour des fréquences moyennes (k entre 20 et 30) mais plus forte pour les hautes fréquences (k au delà de 40). Les pics en $k = 15 (\simeq \pi * 5)$ et $k = 31 (\simeq \pi * 10)$ ont

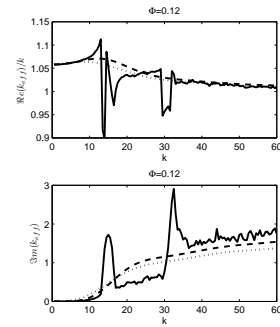


FIG. 11 – k_{eff} en fonction de la fréquence pour une densité $\Phi = 12\%$

une explication simple : il s'agit des fréquences centrales des bandes interdites du réseau périodique sous-jacent. En dehors de ces fréquences, les modèles de multi-diffusion s'appliquent comme le montre le cas d'une densité plus faible $\Phi = 0.04$ (Fig. 12). En d'autres mots une répartition périodique perturbée se comporte en moyenne comme un réseau périodique qu'aux fréquences de bandes interdites de ce réseau. Pour toutes les autres fréquences la configuration moyenne se comporte comme une configuration aléatoire, même pour des densités non très petites.

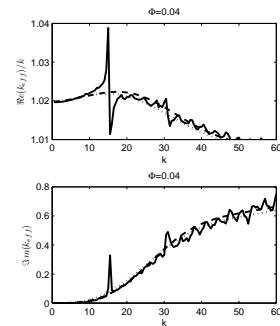


FIG. 12 – k_{eff} en fonction de la fréquence pour une densité $\Phi = 4\%$

Nous pouvons facilement accéder à la masse volumique effective, quantité "artificielle" (notamment complexe) introduite pour pouvoir écrire des conditions aux

limites "usuelles" :

$$\frac{\rho_{eff}}{\rho} = \tau \frac{k_{eff}}{k} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{u-1}{u+1} \quad \text{et} \quad u = \frac{te^{ik_{eff}L} - 1}{r}.$$

A notre connaissance il n'existe pas de modèle donnant l'expression de ρ_{eff}/ρ , sauf en homogénéisation (basse fréquence [12]). Nos résultats numériques pour ρ_{eff} ne permettent pas d'intuiter un modèle car ils montrent des variations en fonction de la densité ou de la fréquence beaucoup plus chahutées que pour k_{eff} . En pratique, comme r est mesuré très petit on obtient u très grand ce qui donne $\tau \simeq 1$. Il apparaît que ρ_{eff} reste proche de ρ (car k_{eff} est proche de k) et qu'il ne suit pas du tout la loi obtenue en homogénéisation, même à basses fréquences.

5 Lien entre milieu effectif et milieu réel

Nous avons montré que pour des densités assez faibles le champ moyen est associé à un nombre d'onde effectif prévu par des modèles analytiques. En pratique on ne dispose que d'une configuration (sauf pour des particules en suspensions et en mouvement en faisant plusieurs mesures au cours du temps) et on ne peut pas mesurer un tel champ moyen. Expérimentalement on peut effectuer une moyenne en bougeant l'émetteur d'ondes et le récepteur [6], mais cette moyenne reste limitée car la même configuration est considérée, vue sous différents angles. Afin de déterminer si les théories de champ moyen peuvent avoir un intérêt pratique, nous avons étudié le lien qu'il y a entre un champ instantané (obtenu pour une configuration particulière de diffuseurs) et le champ moyen. Nous avons obtenu deux résultats complémentaires (Fig. 13) : en transmission la moyenne de l'énergie du mode plan $\langle T_0 \rangle$ est proche de l'énergie de la composante plane du champ moyen \bar{T}_0 (Fig. 13 (a)). Ce phénomène ne s'observe que pour le mode plan, pas du tout pour les autres modes. De plus pour des densités modérées la moyenne de l'énergie transmise du mode plan $\langle T_0 \rangle = \sum_{j=1}^{N_c} T_0^j / N_c$ est proche de chacune des composantes T_0^j de la moyenne. Ce résultat est obtenu en calculant la variance $\sigma^2(T_0) = \langle (T_0 - \langle T_0 \rangle)^2 \rangle$ (Fig. 13 (b)). Finalement ces deux résultats combinés indiquent que pour des densités modérées une mesure de l'énergie transmise par la composante plane d'un champ particulier T_0^j est proche de l'énergie de la composante plane du champ moyen \bar{T}_0 . En pratique, si on mesure un champ transmis et qu'on en extrait la composante plane, celle-ci est bien décrite par les modèles analytiques si on reste dans une gamme de densités modérées.

6 Extensions de la méthode

L'utilisation d'une méthode à base d'éléments finis permet la considération d'obstacles de forme quelconque. Nous avons testé le cas d'obstacles carrés orientés aléatoirement (Fig. 14)

La comparaison entre la transmission obtenue numériquement et celles prévues par les modèles ana-

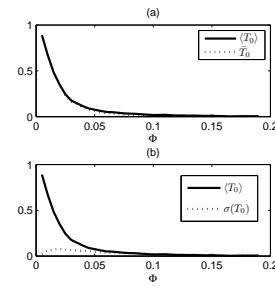


FIG. 13 – Bilans d'énergie pour la composante plane et $k = 45$

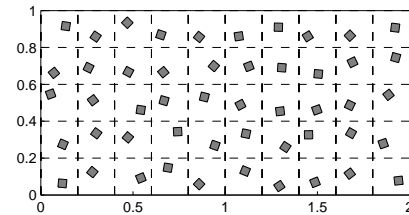


FIG. 14 – Cas de diffuseurs carrés

lytiques (Fig. 15) montre, comme pour les obstacles cylindriques, qu'il y a un très bon accord pour les basses fréquences, puis l'atténuation obtenue numériquement est moins forte que celle prédite par les modèles analytiques pour des fréquences moyennes (k entre 20 et 30) mais plus forte pour les hautes fréquences (k au delà de 30).

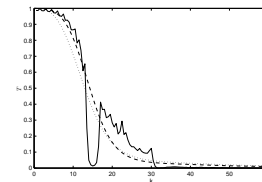


FIG. 15 – Transmissions par des carrés en fonction de la fréquence pour $\Phi = 8\%$

L'extension au cas de diffuseurs pénétrables, remplis d'un fluide ou obstacles élastiques en présence d'ondes SH, nécessite des développements supplémentaires car la représentation intégrale Eq. 1 prend une forme plus complexe, mais ne pose pas de problème particulier.

Références

- [1] L.L. Foldy, "The multiple scattering of waves. I : General Theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers", *Physical Review*. 67, 107-119 (1945).
- [2] M. Chekroun, L. Le Marrec, B. Lombard, J. Piroux, O. Abraham, "Comparison between a multiple scattering method and direct numerical simulations for elastic wave propagation in concrete", *Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous Media*, Series : Springer Proceedings in Physics, 128, A. Leger, M. Deschamps (Eds.), 317-327 (2008).

- [3] K. Nakashima, S. Biwa, E. Matsumoto, "Elastic Wave Transmission and Stop Band Characteristics in Unidirectional Composites", *J Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering* 2, 1195-1206 (2008).
- [4] J. Segurado, J. Llorca, "A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 2107-2121 (2002).
- [5] N.A. Gumerov, R. Duraiswami, "Computation of scattering from clusters of spheres using the fast multipole method", *J. Acoust. Soc. Am.* 117, 1744-1761 (2005).
- [6] A. Derode, V. Mamou, A. Tourin, "Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium", *Phys. Rev. E* 74, id. 036606 (2006).
- [7] B.C. Gupta, Z. Ye, "Localization of classical waves in two-dimensional random media : A comparison between the analytic theory and exact numerical simulation", *Physical Review E* 67, id. 036606 (2003).
- [8] S. Biwa, F. Kobayashi, N. Ohno, "Influence of disordered fiber arrangement on SH wave transmission in unidirectional composites", *Mechanics of Materials* 39, 1-10 (2007).
- [9] Eric Lunéville, Jean-Francois Mercier, "Waves in Random and Complex Media Finite Element Simulations of Multiple Scattering in Acoustic Waveguides", accepté par *Waves in Random and Complex Media* (2010).
- [10] R. Pyrz, "Correlation of microstructure variability and local stress field in two-phase materials", *Mater. Sci. Eng.* A177, 253-259 (1994).
- [11] C.M. Linton, P.A. Martin, "Multiple scattering by random configurations of circular cylinders : Second-order corrections for the effective wave-number", *J. Accoust. Soc. America* 117, 3413-3423 (2005).
- [12] J. G. berryman, "Long-wavelength propagation in composite elastic media I. Spherical inclusions", *J. Accoust. Soc. America* 68, 1809-1819 (1980).