Endommagement de structures non linéaires et homogénéisation

Jean-François Babadjian

Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions

Séminaire commun DEFI – MEDISIM – POEMS

Endommagement : Affaiblissement des propriétés élastiques d'un milieu lors d'une série d'essais de charge-décharge.

Endommagement brutal : Chaque point du matériau est soit sain, soit endommagé.

Variable interne : $\chi =$ fonction caractéristique de la zone endommagée.

Hypothèses sur la modélisation :

- ✓ L'évolution est lente $\Rightarrow$ cadre quasi-statique ;
- ✓ Le matériau a une loi de comportement non linéaire $\Rightarrow$ la variable cinématique naturelle est le champ des déformations ($=$ identité $+$ déplacement).

Formulation statique de l'endommagement

- ✓ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$: configuration de référence d'un milieu non linéairement élastique.
- ✓ $W_1,\ W_2 : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$: fonctions convexes à croissance $p > 1$ telles que $W_1 \leq W_2$.
  $\to$ Densités d'énergie élastique des parties endommagées et saines du matériau :

$$\text{Densité totale : } \chi(x) W_1(\xi) + (1 - \chi(x)) W_2(\xi)$$

- ✓ Condition limite : on impose une déformation g sur le bord $\partial\Omega$ du matériau.
- ✓ $u : \Omega \to \mathbb{R}$ le champ des déformations qui satisfait $u = g$ sur $\partial\Omega$;
- ✓ $\chi : \Omega \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de la zone endommagée ;

$$u \in W^{1,p}_g(\Omega) \quad \text{et} \quad \chi \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$$

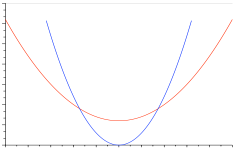
Critère de stabilité (Francfort-Marigo)

On cherche un couple (u, χ) qui minimise l'énergie totale

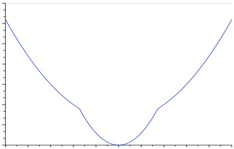
$$\mathcal{E}(u,\chi) := \underbrace{\int_\Omega \left(\chi W_1(\nabla u) + (1-\chi) W_2(\nabla u)\right) dx}_{\text{énergie potentielle}} + \underbrace{\int_\Omega \chi \, dx}_{\text{énergie dissipée}}.$$

$$\inf_{v,\chi} \mathcal{E}(v,\chi) = \inf_v \int_\Omega \psi(\nabla v)\, dx = \min_v \int_\Omega \psi^{**}(\nabla v)\, dx = \int_\Omega \psi^{**}(\nabla u)\, dx,$$

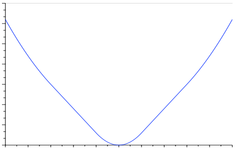
où $\psi(\xi) = \min\{W_1(\xi) + 1, W_2(\xi)\}$ et ψ^{**} est l'enveloppe convexe de ψ.



Les fonctions W_2 et $W_1 + 1$



La fonction ψ



La fonction ψ^{**}

Calcul de l'énergie relaxée

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\psi^{**}(\xi) = \min_{\theta\in[0,1]} \min_{W\in\overline{P_\theta}} \{W(\xi) + \theta\},$$

où

- ✓ P_θ est l'ensemble des densités d'énergie obtenues comme mélanges périodiques entre W_1 et W_2 à fraction volumique θ et $1-\theta$;
- ✓ $\mathcal{G}_\theta$ est l'ensemble des densités d'énergie obtenues comme mélanges quelconque entre W_1 et W_2 à fraction volumique θ et $1-\theta$:

Propriété de localité (Tartar, Lurie-Cherkaev, Dal Maso-Kohn, Raitums) :

Theorem (B. - Barchiesi)

Pour tout $\theta \in L^\infty(\Omega;[0,1])$, on a

$$\mathcal{G}_\theta = \{W : \Omega\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N : W(x,\cdot) \in \overline{P_{\theta(x)}} \textit{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Soient

$$u = \arg \min_{v \in W^{1,p}_g(\Omega)} \int_\Omega \psi^{**}(\nabla v)\, dx,$$

et $\theta \in L^\infty(\Omega; [0,1])$ et $W \in \mathcal{G}_\theta$ tels que

$$\psi^{**}(\nabla u(x)) = W(x, \nabla u(x)) + \theta(x) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega.$$

Donc

$$\inf_{v,\chi} \mathcal{E}(v,\chi) = \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx + \int_\Omega \theta\, dx.$$

Conclusions :

- ✓ Le modèle d'endommagement brutal est donc "mal posé" ;
- ✓ Extension à un modèle relaxé d'endommagement progressif avec plus de configurations admissibles ;
- ✓ Apparitions de zones partiellement endommagées résultant de mélanges fins ;
- ✓ Nouvelle variable interne du modèle relaxé : (W, θ) au lieu de χ.

Evolution quasi-statique de l'endommagement

On se donne une déformation $g(t) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$.

Difficulté : tenir compte du fait que l'endommagement est un processus irréversible

Modèle discret : $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$.
✓ Instant initial : $\exists\ u_0 \in W^{1,p}_{g(0)}(\Omega)$, $\theta_0 \in L^\infty(\Omega; [0,1])$ et $W_0 \in \mathcal{G}_{\theta_0}$ tq

$$\int_\Omega W_0(x, \nabla u_0)\, dx + \int_\Omega \theta_0\, dx$$
$$= \inf\left\{\mathcal{E}(v, \chi) : v \in W^{1,p}_{g(0)}(\Omega),\ \chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})\right\} =: m_0.$$

✓ Instant t_i : on se donne $u_{i-1} \in W^{1,p}_{g(t_{i-1})}(\Omega)$, $\theta_{i-1} \in L^\infty(\Omega;[0,1])$ et $W_{i-1} \in \mathcal{G}_{\theta_{i-1}}$ et on cherche un réarrangement optimal entre la partie endommagée et le matériau obtenu au temps t_{i-1} (Francfort-Garroni) :

$$m_i := \inf_{v,\chi} \int_\Omega \Big(\chi W_1(\nabla v) + (1-\chi) W_{i-1}(x, \nabla v) + (1-\theta_{i-1})\chi \Big)\, dx.$$

$\Rightarrow u_i \in W^{1,p}_{g(t_i)}(\Omega)$, $\theta_i \in L^\infty(\Omega;[0,1])$ et $W_i \in \mathcal{G}_{\theta_i}$, tq

$$\int_\Omega W_i(x, \nabla u_i)\, dx + \int_\Omega \theta_i \, dx = m_i,$$

avec les propriétés de monotonie :

$$\theta_{i-1} \le \theta_i \quad W_{i-1} \ge W_i.$$

Modèle continu : $\Delta x \to 0$.

Theorem (B.)

On suppose que $g \in W^{1,1}([0,T]; W^{1,p}(\Omega))$ et que W_1, W_2 sont uniformément convexes et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\forall\ t \in [0,T]$,

$$\exists\ u(t) \in W^{1,p}_{g(t)}(\Omega),\ \theta(t) \in L^\infty(\Omega;[0,1]),\ W(t) \in \mathcal{G}_{\theta(t)}\ :$$

- ✓ *Irréversibilité : $\theta(t) \nearrow$ et $W(t) \searrow$;*
- ✓ *Minimalité : $\forall\ \hat{v} \in W^{1,p}_{g(t)}(\Omega)$, $\hat{\theta} \in L^\infty(\Omega;[0,1])$ avec $\hat{\theta} \geq \theta(t)$ et $\hat{W} \in \mathcal{G}_{\hat{\theta}}(W_1, W(t))$,*

$$\mathcal{E}(t) := \int_\Omega W(t)(x, \nabla u(t))\, dx + \int_\Omega \theta(t)\, dx \leq \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla \hat{v})\, dx + \int_\Omega \hat{\theta}\, dx;$$

- ✓ *Bilan d'énergie : l'énergie totale satisfait*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \int_\Omega DW(s)(x, \nabla u(x,s)) \cdot \nabla \dot{g}(x,s)\, dx\, ds.$$

En particulier, $W(t) \in \mathcal{G}_0(W_1, W(t)) \Rightarrow u(t)$ est solution (au sens faible) de l'EDP : pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\big(DW(t)(x, \nabla u(t))\big) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(t) = g(t) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et le bilan d'énergie s'écrit après une intégration par parties :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \underbrace{DW(s)(x, \nabla u(x,s)) \cdot \nu}_{\text{travail associé à la déformation sur le bord}} \dot{g}(x,s)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, ds.$$

Formulation statique de la fracture

Fissure = surface fermée $\Gamma \subset \Omega$ (variable interne en rupture).
Energie dissipée (Griffith) : $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)$, u peut être discontinue à travers Γ.
Formulation forte : (u, χ, Γ) minimise l'énergie totale

$$\mathcal{E}(u, \chi, \Gamma) := \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\chi W_1(\nabla u) + (1-\chi) W_2(\nabla u))\, dx + \int_\Omega \chi\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)$$

parmi tous les $\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})$, $\Gamma \subset \Omega$ fermés, et $u \in W_g^{1,p}(\Omega \setminus \Gamma)$
Formulation faible : $\Gamma \sim J_u \Rightarrow$ formulation dans un sous espace $SBV(\Omega)$ des fonctions BV.
(u, χ) minimise l'énergie totale

$$\mathcal{E}(u, \chi) := \int_\Omega (\chi W_1(\nabla u) + (1-\chi) W_2(\nabla u))\, dx + \int_\Omega \chi\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(J_u)$$

parmi tous les $\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})$ et $u \in SBV_g(\Omega)$.

Théorème de compacité d'Ambrosio + analyse de l'endommagement pur
$\Rightarrow \exists\ \theta \in L^\infty(\Omega; [0,1])$, $u \in SBV_g(\Omega)$ et $W \in \mathcal{G}_\theta$ tels que

$$\inf_{v,\chi} \mathcal{E}(v,\chi) = \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx + \int_\Omega \theta\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(J_u).$$

Conclusion :

- ✓ W et θ identiques à ceux obtenus en endommagement pur ;
- ✓ Pas d'interaction entre l'endommagemement et la fracture.

Evolution quasi-statique de l'endommagement/fracture

On se donne une déformation $g(t) : \partial\Omega \to \mathbb{R}$.
Modèle discret : $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$.
✓ Instant intial : $\exists\ u_0 \in SBV_{g(0)}(\Omega)$, $\theta_0 \in L^\infty(\Omega; [0,1])$ et $W_0 \in \mathcal{G}_{\theta_0}$ tq

$$\int_\Omega W_0(x, \nabla u_0)\, dx + \int_\Omega \theta_0\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(J_{u_0}) = \inf \Big\{ \mathcal{E}(v, \chi) : v \in SBV_{g(0)}(\Omega), \chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\}) \Big\}.$$

On pose $\Gamma_0 := J_{u_0}$: la fissure créée à l'instant initial.

✓ Instant t_i : Soient $u_{i-1} \in SBV_{g(t_{i-1})}(\Omega)$, $\theta_{i-1} \in L^\infty(\Omega;[0,1])$, $\Gamma_{i-1} \subset \Omega$ rectifiable et $W_{i-1} \in \mathcal{G}_{\theta_{i-1}}$ donnés.

$$m_i := \inf_{v,\chi} \int_\Omega \Big(\chi W_1(\nabla v) + (1-\chi) W_{i-1}(x, \nabla v) + (1-\theta_{i-1})\chi\Big)\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(J_v \setminus \Gamma_{i-1})$$

$\Rightarrow \exists\ u_i \in SBV_{g(t_i)}(\Omega)$, $\theta_i \in L^\infty(\Omega;[0,1])$ et $W_i \in \mathcal{G}_{\theta_i}$, tq

$$\int_\Omega W_i(x, \nabla u_i)\, dx + \int_\Omega \theta_i\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(J_{u_i} \setminus \Gamma_{i-1}) = m_i.$$

On pose $\Gamma_i := \Gamma_{i-1} \cup J_{u_i}$ et on a les propriétés de monotonie :

$$\theta_{i-1} \le \theta_i, \quad \Gamma_{i-1} \subset \Gamma_i \quad W_{i-1} \ge W_i.$$

Modèle continu

Theorem (B.)

On suppose que $g \in W^{1,1}([0,T]; W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times [0,T])$ *et que* W_1, W_2 *sont uniformément convexes et de classe* $\mathcal{C}^1$. *Alors* $\forall\ t \in [0,T]$,

$$\exists\ u(t) \in SBV_{g(t)}(\Omega),\ \theta(t) \in L^\infty(\Omega;[0,1]),\ \Gamma(t) \subset \Omega \text{ rectifiable et } W(t) \in \mathcal{G}_{\theta(t)} :$$

- ✓ *Irréversibilité* : $\theta(t) \nearrow$, $\Gamma(t) \nearrow$ *et* $W(t) \searrow$;
- ✓ *Minimalité* : $\forall\ \hat{v} \in SBV_{g(t)}(\Omega)$, $\hat{\theta} \geq \theta(t)$, $\hat{\Gamma} \supset \Gamma(t)$ *et* $\hat{W} \in \mathcal{G}_{\hat{\theta}}(W_1, W(t))$,

$$\mathcal{E}(t) := \int_\Omega W(t)(x, \nabla u(t))\, dx + \int_\Omega \theta(t)\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma(t)) \leq \int_\Omega \hat{W}(x, \nabla \hat{v})\, dx + \int_\Omega \hat{\theta}\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(\hat{\Gamma});$$

- ✓ *Bilan d'énergie* : *l'énergie totale* :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \int_\Omega DW(s)(x, \nabla u(x,s)) \cdot \nabla \dot{g}(x,s)\, dx\, ds.$$