

Cours AMS303 :
Méthodes variationnelles pour l'analyse et
la résolution de problèmes non coercifs

Patrick Ciarlet et Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia
ENSTA Paris
828, boulevard des Maréchaux
91762 Palaiseau Cedex

©Partie 2, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, 2021

Table des matières

1	Introduction à la physique des matériaux électromagnétiques négatifs	1
1.1	Les modèles de Drude et Drude-Lorentz	1
1.2	Deux effets du changement de signe des constantes électromagnétiques	5
2	Etude des problèmes de transmission avec changement de signe	11
2.1	Description du problème de transmission	11
2.2	La T-coercivité	13
2.3	Le cas des contrastes grands ou petits	14
2.4	Le cas des domaines symétriques	17
2.5	Le cas des interfaces à coin	20
2.6	Une idée de la démarche générale	24

Notes de cours 1

Introduction à la physique des matériaux électromagnétiques négatifs

Deux domaines de la physique sont en pleine effervescence depuis une dizaine d'années : la plasmonique qui s'intéresse aux ondes électromagnétiques à la surface de particules métalliques aux fréquences optiques, et les métamatériaux, qui sont des matériaux artificiels donnant lieu à des phénomènes électromagnétiques extraordinaires. Dans ces deux domaines, les phénomènes intéressants résultent du changement de signe de la permittivité diélectrique entre le milieu extérieur d'une part (l'air ou le vide) et le métal ou le métamatériau d'autre part. Ce changement de signe est responsable d'une perte de coercivité des équations à résoudre, et nous verrons dans la suite comment les étudier à l'aide des outils qui ont été introduits dans les chapitres précédents.

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord les modèles physiques de Drude et de Drude-Lorentz qui permettent d'exprimer la permittivité diélectrique ε d'un métal en fonction de la fréquence. Ces modèles dispersifs permettent d'identifier une plage de fréquences où la partie réelle de ε est négative. Les modèles de métamatériaux sont ensuite rapidement discutés.

Dans une seconde partie, nous expliquons dans des configurations simples pourquoi un changement de signe de la permittivité conduit d'une part à l'existence de plasmons de surface, et d'autre part au phénomène de réfraction négative.

1.1 Les modèles de Drude et Drude-Lorentz

On rappelle que les ondes électromagnétiques sont modélisées par les équations de Maxwell qui s'écrivent, en régime périodique établi de fréquence ω , comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}. \end{cases}$$

Les inconnues \mathbf{E} et \mathbf{H} sont les champs électrique et magnétique, et la donnée \mathbf{J} est la densité de courant.

Les coefficients ε et μ sont la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique. Ils caractérisent le matériau. Dans les études mathématiques usuelles, on suppose le plus souvent que ces coefficients sont des constantes strictement positives, ou des fonctions de l'espace, bornées et minorées par des constantes strictement positives. Les résultats d'analyse mathématique ou d'analyse numérique exploitent cette hypothèse de positivité. Notre objectif dans ce qui suit est de montrer que sous certaines hypothèses physiques, il peut être pertinent de considérer des coefficients négatifs.

Construction du modèle de Drude-Lorentz Les explications ci-dessous sont largement inspirées du cours de Raphaël Grandin de l'Institut de Physique du Globe de Paris .

Dans le vide, ε et μ sont des constantes strictement positives que l'on note généralement ε_0 et μ_0 . Dans un milieu différent du vide, une onde électromagnétique modifie elle-même le milieu dans lequel elle se propage, en mettant en mouvement les charges présentes. Cela produit ce qu'on appelle la polarisation et l'aimantation. Pour décrire correctement ces phénomènes, il faudrait une théorie quantique, mais on peut raisonnablement se contenter d'une théorie qualitative, obtenue à l'aide de principes classiques.

Ces modèles que nous allons décrire sont dûs à Paul Drude, physicien allemand (1863-1906), et Hendrik Antoon Lorentz, physicien hollandais (1853-1926).

On considère que les noyaux des atomes sont fixes alors que les électrons de masse m et de charge $-e$ sont mobiles. Ces électrons subissent :

- la force de Lorentz due à la présence du champ électromagnétique,
- une force de frottement causée par les collisions avec l'environnement,
- une force de rappel, provoquée par l'interaction avec les noyaux.

Si \mathbf{u} désigne la position d'un électron, son mouvement est donc décrit par une équation du type suivant :

$$m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \wedge \mu \mathbf{H} \right) - m\gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt} - K \mathbf{u}$$

où γ et K sont des constantes positives. On néglige la partie de la force de Lorentz due au champ magnétique de sorte que \mathbf{u} est parallèle au champ électrique \mathbf{E} . En posant $u = (\mathbf{u}, \mathbf{E}) / \|\mathbf{E}\|$, l'équation du mouvement de l'électron se réécrit comme suit :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = -\frac{e}{m} E$$

où l'on a posé $E = \|\mathbf{E}\|$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Si on est en régime périodique établi de fréquence ω , alors

$$E(t) = \hat{E} e^{-i\omega t} \text{ et } u(t) = \hat{u} e^{-i\omega t},$$

ce qui donne après insertion dans la formule ci-dessus :

$$\hat{u} = \frac{-\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \hat{E},$$

ou encore de façon équivalente

$$\mathbf{u} = \frac{-\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E}.$$

On va tenir compte maintenant du fait que le milieu contient une densité volumique N d'électrons. Ces électrons par leur mouvement créent un courant de densité

$$\mathbf{J} = -Ne \frac{d\mathbf{u}}{dt} = i\omega N e \mathbf{u}.$$

On en déduit que le courant créé par le champ électrique faisant se déplacer les électrons est lui même proportionnel au champ électrique puisque l'on a :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \text{ avec } \sigma = \frac{-i\omega N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

Ce courant devient lui-même une source dans les équations de Maxwell puisqu'on rappelle que (dans le vide)

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}.$$

En injectant l'expression de \mathbf{J} dans cette équation, on obtient finalement

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}$$

où

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{\sigma}{i\omega}$$

que l'on récrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\gamma} \right)$$

avec

$$\omega_P^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

Cette pulsation ω_P est appelée la pulsation plasma (d'où le P).

Commentons le modèle obtenu.

— On remarque tout d'abord que la permittivité diélectrique du matériau, contrairement à celle du vide, dépend de la pulsation ω (et donc de la fréquence $\omega/2\pi$). On dit que le matériau est *dispersif*.

— Lorsque $\gamma > 0$, et donc $\Im m(\varepsilon) > 0$, les collisions engendrent des pertes énergétiques dans le matériau (on parle d'effet Joule dans un métal). On dit alors que le matériau est *dissipatif*.

— Dans le cas général où ω_0 et γ ne sont pas nuls, on parle de modèle de Drude-Lorentz.

Nous allons revenir plus en détails sur le cas des métaux.

Le cas des métaux Comme on l'a dit plus haut, la permittivité d'un métal peut être modélisée en tant que fonction de ω par le modèle de Drude suivant

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \right)$$

avec $\gamma > 0$. On a donc :

$$\Re(\varepsilon) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 + \gamma^2} \right), \quad \Im(\varepsilon) = \varepsilon_0 \frac{\omega_P^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}.$$

Les deux courbes correspondantes sont représentées sur la figure 1.1. Classiquement, en élec-

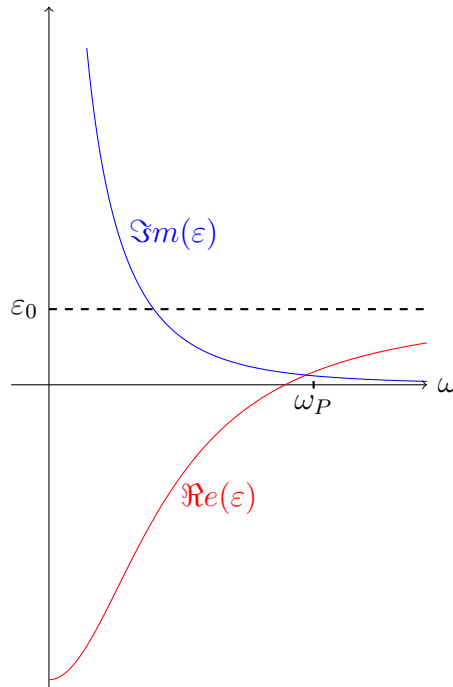


FIGURE 1.1 – Parties réelles et imaginaires de la permittivité d'un métal

tronique, les métaux sont exploités à basse fréquence, là où la partie imaginaire de ε domine. C'est le classique effet Joule. Si ω est petit devant γ , on utilise l'approximation suivante de ε sous la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_P^2}{i\omega\gamma} \right) = \varepsilon_0 + i \frac{\sigma}{\omega}$$

où la conductivité σ est réelle. Ce qui est plus original et a été permis par des avancées expérimentales récentes, c'est d'exploiter le métal à plus haute fréquences, dans le domaine des fréquences optiques. Plus précisément, la plasmonique correspond à une plage de fréquences telles que ω est inférieur à ω_P mais grand devant γ , de sorte que ε a une partie réelle négative et une partie imaginaire négligeable. Ceci est possible pour les métaux rares tels que l'or et l'argent. Par exemple pour l'argent, on a $\gamma \approx 0,113PHz$ et $\omega_P = 13,3PHz$. La longueur d'onde associée à la pulsation ω_P est $\lambda_P \approx 142nm$. Cette longueur d'onde se trouve dans l'ultraviolet, juste en-dessous des longueurs d'onde du domaine visible.

On peut dans ce cas utiliser l'approximation suivante, que l'on appelle modèle de Drude non dissipatif :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right). \quad (1.1)$$

Les métamatériaux Nous avons vu qu'il était raisonnable dans certaines conditions de considérer qu'un métal a une permittivité réelle négative. Une question naturelle, étant donnée la symétrie apparente des équations de Maxwell, est la suivante : existe-t-il des matériaux dont la perméabilité magnétique μ est réelle négative ? A première vue, cela semble impossible car il n'existe pas de charges magnétiques ponctuelles comparables aux charges électriques que sont les électrons. Idéalement, on souhaiterait même trouver des matériaux où à la fois ε et μ sont réels et négatifs. En effet, il a été montré théoriquement [16] que cela donnerait lieu à des phénomènes extraordinaires comme la réfraction négative, et permettrait par exemple de réaliser de façon simple des lentilles parfaites [17]. L'idée a été de concevoir des matériaux micro-structurés, qui puissent être modélisés lorsque la longueur d'onde est grande devant la taille des micro-structures, comme des matériaux avec ε et μ réels négatifs. Ceci a été en effet réalisé dans le domaine des micro-ondes en assemblant de petits résonateurs. Aujourd'hui, de nombreux physiciens proposent de nouvelles idées pour réaliser des matériaux étranges. Les mathématiciens quant à eux s'intéressent à la justification du processus d'*homogénéisation* [18]. Signalons finalement que pour respecter les grands principes physiques tels que la causalité, ε et μ doivent être de la forme suivante (ou d'une forme similaire avec plusieurs pôles) :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Omega_E^2}{\omega^2 - \omega_E^2 + i\omega\gamma_E} \right) \text{ et } \mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\Omega_H^2}{\omega^2 - \omega_H^2 + i\omega\gamma_H} \right)$$

avec $\gamma_{E/H} > 0$.

1.2 Deux effets du changement de signe des constantes électromagnétiques

1.2.1 Les plasmons de surface

Considérons un métal dont la permittivité est notée ε_m (m pour métal) et qui occupe le demi-espace $x_2 < 0$. On suppose que le demi-espace $x_2 > 0$ est vide. Un plasmon de surface est une onde électromagnétique qui se propage parallèlement à la surface, soit par exemple dans la direction x_1 , et qui est confinée au voisinage de la surface $x_2 = 0$. Cela nous conduit en particulier à rechercher des solutions des équations de Maxwell (sans terme source J) indépendantes de x_3 . Or il est bien connu (et facile à vérifier) que les équations de Maxwell se découpent alors en deux sous-systèmes correspondant respectivement aux ondes ou Transverse Électriques (telles que $H_1 = H_2 = E_3 = 0$) et aux ondes Transverses Magnétiques (telles que $E_1 = E_2 = H_3 = 0$). Le plasmon est une onde Transverse Magnétique, donc nous allons nous concentrer sur ce cas.

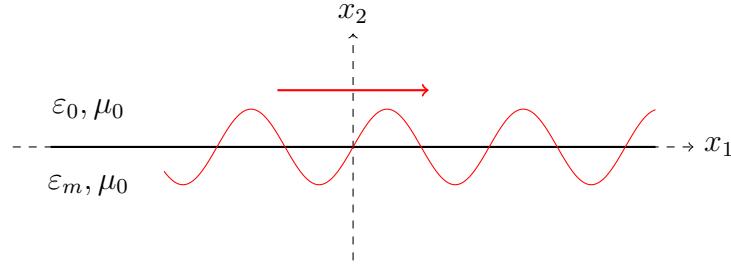


FIGURE 1.2 – Configuration géométrique pour l'étude du plasmon de surface

On peut montrer que

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_2 u \\ -\partial_1 u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

est solution des équations de Maxwell (avec $J = 0$) si et seulement si la fonction u vérifie l'équation

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u \right) + \omega^2 \mu u = 0. \quad (1.3)$$

Ici $\mu = \mu_0$ et ε est une fonction de x_2 (et de ω) telle que

$$\varepsilon(x_2) = \begin{cases} \varepsilon_m(\omega) & \text{si } x_2 < 0, \\ \varepsilon_0 & \text{si } x_2 > 0. \end{cases}$$

Dire que l'on cherche une onde guidée par la surface revient alors à chercher u de la forme suivante

$$u(x_1, x_2) = \hat{u}(x_2) e^{i\beta x_1}, \text{ avec } \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

La condition $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ va imposer le confinement. Si on réintroduit la dépendance temporelle qui avait été éliminée dans les équations, on fait apparaître le terme

$$e^{i(\beta x_1 - \omega t)}$$

qui correspond à une propagation dans la direction x_1 (si $\omega, \beta > 0$) à la vitesse ω/β . En injectant la forme (1.4) dans l'équation (1.3), on obtient l'équation différentielle suivante portant sur \hat{u} :

$$\frac{-\beta^2}{\varepsilon(x_2)} \frac{d\hat{u}}{dx_1} + \frac{d}{dx_2} \left(\frac{1}{\varepsilon(x_2)} \frac{d\hat{u}}{dx_2} \right) + \omega^2 \mu_0 \hat{u} = 0$$

qui doit être vérifiée, au sens des distributions, sur \mathbb{R} . Cela signifie que \hat{u} doit vérifier d'une part ces équations différentielles à coefficients constants de part de d'autre de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{u}}{dx_2^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2) \hat{u} &= 0 & \text{si } x_2 > 0, \\ \frac{d^2 \hat{u}}{dx_2^2} + (\omega^2 \varepsilon_m \mu_0 - \beta^2) \hat{u} &= 0 & \text{si } x_2 < 0, \end{aligned}$$

et d'autre part, les relations de continuité suivantes :

$$\hat{u}(0^-) = \hat{u}(0^+) \text{ et } \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{d\hat{u}}{dx_2}(0^-) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d\hat{u}}{dx_2}(0^+). \quad (1.5)$$

On remarque que si ε_m est négatif, la dérivée de \hat{u} change de signe de part de d'autre de 0, et c'est ce qui va permettre à u de décroître de part et d'autre de l'interface. Plus précisément, pour que la condition $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ soit satisfaite (avec \hat{u} non identiquement nul), il est nécessaire que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\begin{aligned} \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2 &=: -\gamma_0^2 < 0, \\ \omega^2 \varepsilon_m \mu_0 - \beta^2 &=: -\gamma_m^2 < 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Si c'est le cas, en choisissant γ_0 et γ_m strictement positifs, on trouve que \hat{u} est nécessairement de la forme suivante :

$$\hat{u}(x_2) = \begin{cases} A_0 e^{-\gamma_0 x_2} & \text{si } x_2 > 0, \\ A_m e^{\gamma_m x_2} & \text{si } x_2 < 0, \end{cases}$$

où A_0 et A_m sont des constantes complexes à déterminer. En injectant la forme ci-dessus dans conditions de continuité (1.5), on obtient un système linéaire homogène de deux équations à deux inconnues en (A_0, A_m) :

$$\begin{cases} A_0 = A_m \\ -\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} A_0 = \frac{\gamma_m}{\varepsilon_m} A_m \end{cases} \quad (1.7)$$

qui n'a des solutions non triviales que si

$$-\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\gamma_m}{\varepsilon_m}.$$

On voit immédiatement que ceci n'est possible que si ε_m est négatif. On comprend donc pourquoi la plasmonique ne s'est développée que lorsqu'on a pu observer la surface du métal aux fréquences optiques, et donc dans une gamme de fréquences où la permittivité diélectrique du métal est (approximativement) réelle et négative.

Si $\varepsilon_m < 0$, en injectant l'expression (1.6) de γ_0 et γ_m dans la relation ci-dessus, on obtient finalement la relation de dispersion suivante, qui nous donne le carré de la vitesse de l'onde en fonction des coefficients du milieu :

$$\frac{\omega^2}{\beta^2} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_m} \right), \quad (1.8)$$

et qui fournit une seconde condition d'existence des plasmons de surface. En effet, on voit que le terme de droite de l'égalité (1.8) doit être positif, et donc que l'on doit avoir $\varepsilon_m + \varepsilon_0 < 0$.

Remarque 1.1 *Pour aller plus loin, on doit préciser la relation qui donne ε_m en fonction de ω . Si l'on adopte le modèle de Drude non dissipatif (1.1), on trouve que la condition $\varepsilon_m + \varepsilon_0 < 0$ se traduit en fréquence par la condition $\omega < \omega_{SP}$ où*

$$\omega_{SP} = \frac{\omega_P}{\sqrt{2}}$$

(SP pour Surface Plasmon). On peut ensuite représenter β en fonction de ω comme sur la figure 1.3. On observe une asymptote en ω_{SP} , qui se traduit par le fait que la longueur d'onde

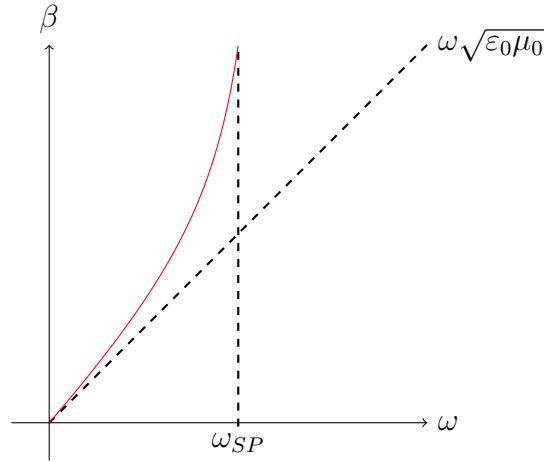


FIGURE 1.3 – Courbe de dispersion du plasmon de surface pour le modèle de Drude non dissipatif

du plasmon de surface tend vers 0 lorsque ω tend vers ω_{SP} . C'est aussi un phénomène très inhabituel de pouvoir générer de toutes petites longueurs d'onde sans augmenter la fréquence. On peut alors envisager d'imager de très petits objets.

1.2.2 La réfraction négative

Nous allons maintenant expliquer pourquoi on peut observer un phénomène de réfraction négative à l'interface entre un diélectrique (ou du vide) et un métamatériau. On va à nouveau considérer une expérience où la géométrie et le champ électromagnétique sont indépendants de la variable x_3 . Plus précisément, on considère cette fois que le demi-espace $x_2 < 0$ est vide et que le demi-espace $x_2 > 0$ est occupé par un métamatériau tel que (à la fréquence considérée) sa permittivité ε_m (m pour métamatériau) et sa perméabilité magnétique μ_m sont toutes deux des réels négatifs. On se souviendra le moment venu que l'on a négligé les effets de dissipation, qui se manifesteraient par une partie imaginaire de ε_m et/ou de μ_m strictement positive.

Tout comme dans le paragraphe précédent, on peut alors se restreindre au calcul d'ondes Transverses Magnétiques de la forme (1.2) où u est une fonction scalaire à valeurs complexes satisfaisant (1.3). Contrairement au paragraphe précédent, nous nous intéressons ici à l'effet de l'interface sur des ondes planes qui se propagent dans une direction non parallèle à celle-ci. Ainsi par exemple, dans le vide, une onde plane correspond à une solution u de la forme

$$u(x_1, x_2) = A_0 e^{i(k_1^0 x_1 + k_2^0 x_2)}$$

avec A_0 une amplitude complexe et (k_1^0, k_2^0) un vecteur d'onde de composantes réelles, qui donne la direction de propagation de l'onde. Pour qu'une telle fonction satisfasse (1.3) dans le vide, il

faut et il suffit que la relation de dispersion suivante soit vérifiée :

$$(k_1^0)^2 + (k_2^0)^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0. \quad (1.9)$$

Une onde qui se propage vers l'interface doit avoir une composante k_2^0 positive.

Dans le métamatériau, on peut également calculer des ondes planes. On a cette fois

$$u(x_1, x_2) = A_m e^{i(k_1^m x_1 + k_2^m x_2)}$$

avec A_m une amplitude complexe et (k_1^m, k_2^m) un vecteur d'onde de composantes réelles vérifiant

$$(k_1^m)^2 + (k_2^m)^2 = \omega^2 \varepsilon_m \mu_m. \quad (1.10)$$

A ce niveau, le fait que ε_m et μ_m soient négatifs ne semblent pas avoir d'importance puisque c'est leur produit, qui est lui positif, qui apparait dans la relation de dispersion.

Classiquement, l'étude de la réfraction par une interface plane consiste à calculer les solutions u du problème global, dans tout le plan, de la forme

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{i(k_1^0 x_1 + k_2^0 x_2)} + R e^{i(k_1^0 x_1 - k_2^0 x_2)} & \text{pour } x_2 < 0, \\ T e^{i(k_1^m x_1 + k_2^m x_2)} & \text{pour } x_2 > 0, \end{cases}$$

avec $k_2^0 > 0$. Dans le vide, la solution est la somme d'une onde qui se propage vers l'interface (appelée onde incidente) et d'une onde réfléchie. Dans le métamatériau, la solution correspond à l'onde transmise. Les coefficients R et T sont appelés coefficients de réflexion et de transmission. La fonction u ci-dessus vérifie les équations souhaitées de part et d'autre de l'interface dès lors que les relations de dispersion (1.9) et (1.10) sont satisfaites. Pour que l'équation (1.3) soit globalement vérifiée, il faut en plus assurer les conditions de raccord à l'interface qui s'écrivent :

$$u(x_1, 0^-) = u(x_1, 0^+) \text{ et } \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0^-) = \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0^+), \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Ceci n'est possible que si $k_1^0 = k_1^m$, que nous pouvons noter k_1 dans la suite et choisir, sans perte de généralité tel que $k_1 \geq 0$. Les conditions de transmission conduisent alors au système linéaire suivant, pour les coefficients R et T :

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ 1 - R = \nu T \end{cases} \quad \text{où } \nu = \frac{k_2^m \varepsilon_0}{k_2^0 \varepsilon_m}. \quad (1.11)$$

On vérifie que ce système est solvable si et seulement si $\nu \neq -1$.

Tous ces calculs sont très classiques lorsque l'on s'intéresse à une interface entre deux matériaux "positifs". Le phénomène de réfraction correspond au changement de direction de l'onde, entre l'onde incidente et l'onde transmise. L'onde incidente a pour direction le vecteur (k_1, k_2^0) avec $k_1 > 0$ et $k_2^0 > 0$. Dans un matériau positif, l'onde transmise quant à elle a pour direction le vecteur (k_1, k_2^m) , où l'on a choisi $k_2^m > 0$ puisque l'onde transmise s'éloigne de l'interface.

Ces deux vecteurs (k_1, k_2^0) et (k_1, k_2^m) ont leur première composante k_1 positive : on parle de réfraction positive.

Dans le cas d'un matériau "négatif", on observe une réfraction négative. Comment cela est-il possible ? On peut remarquer que dans la relation (1.10), étant donné $k_1^m = k_1$, il existe deux valeurs possibles de k_2^m opposées l'une de l'autre. Et nous allons expliquer pourquoi dans le cas d'un matériau négatif, il faut choisir k_2^m négatif. Une façon de s'en convaincre est, comme on l'a annoncé au début du paragraphe, de réintroduire une faible dissipation dans le métamatériau. Autrement dit, on suppose par exemple que la permittivité est égale à $\varepsilon_m + i\delta_m$ avec $\delta_m > 0$ un paramètre que l'on va faire tendre vers 0. La relation de dispersion s'écrit alors

$$k_1^2 + (k_2^m)^2 = \omega^2(\varepsilon_m + i\delta_m)\mu_m.$$

Etant donné k_1 , cette équation en k_2^m admet deux solutions complexes opposées l'une de l'autre :

$$\pm \sqrt{\omega^2(\varepsilon_m + i\delta_m)\mu_m - k_1^2}.$$

La solution physiquement acceptable est celle qui conduit à un champ exponentiellement décroissant loin de l'interface (et non exponentiellement croissant). Autrement dit, on veut $\Im m(k_2^m) > 0$. On vérifie aisément, en remarquant que le nombre sous la racine a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative, que ceci entraîne $\Re e(k_2^m) < 0$, et donne à la limite $\delta_m = 0$ une valeur négative de k_2^m comme on l'avait annoncé.

Ceci est surprenant : comment une onde qui s'éloigne de l'interface peut-elle avoir un vecteur d'onde qui pointe vers l'interface ? L'explication est que dans le métamatériau, une onde plane a une vitesse de phase opposée à sa vitesse de groupe. Autrement dit, elle se déplace comme Mickel Jackson avec sa moon-walk, et avance en reculant. Donc l'onde transmise se déplace en réalité dans la direction $(-k_1, -k_2^m)$. Elle s'éloigne bien de l'interface mais a changé de direction parallèlement à l'interface, c'est la réfraction négative.

Pour conclure, on peut noter que dans le cas idéal où $\varepsilon_m = -\varepsilon_0$ et $\mu_m = -\mu_0$, $k_2^m = -k_2^0$ et le coefficient ν qui apparaît dans le système (1.11) est égal à 1. La transmission est parfaite dans ce cas et la réflexion nulle.

Notes de cours 2

Etude des problèmes de transmission avec changement de signe

Nous avons vu au chapitre précédent qu'il pouvait être pertinent et intéressant de considérer des problèmes d'électromagnétisme où les coefficients ε et/ou μ changent de signe dans le milieu. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un problème modèle très simple de ce type, faisant intervenir un coefficient variable noté σ qui change de signe (mais sans s'annuler) dans le domaine. Ce problème écrit sous forme faible fait intervenir une forme bilinéaire qui n'est pas coercive, à cause du changement de signe de σ . L'objet de ce chapitre est de montrer sous certaines conditions sur les coefficients et/ou sur la géométrie que le problème est bien posé, malgré cette perte de coercivité. On verra aussi comment assurer la convergence d'une méthode d'éléments finis.

2.1 Description du problème de transmission

On note Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , où $N > 1$ (en pratique on s'intéressera aux cas $N = 2$ et $N = 3$). On suppose qu'il existe une frontière Σ (une courbe si $N = 2$ et une surface si $N = 3$) telle que $\Omega = \Sigma \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints tels que $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Sigma$. On suppose enfin que Ω , Ω_1 et Ω_2 ont chacun une frontière Lipschitzienne. On note alors σ une

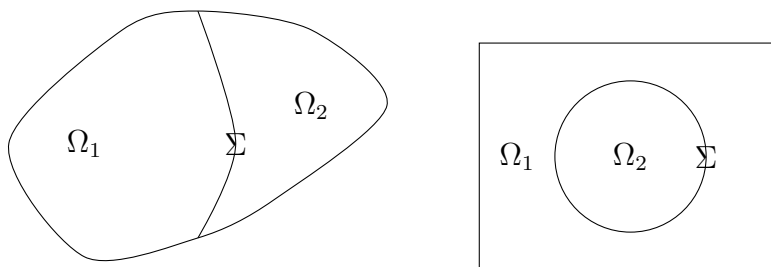


FIGURE 2.1 – Exemples de domaines considérés

fonction telle que

$$\sigma \in L^\infty(\Omega) \text{ et } \frac{1}{\sigma} \in L^\infty(\Omega), \quad (2.1)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) > 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad \sigma(\mathbf{x}) < 0 \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega_2. \quad (2.2)$$

On cherche alors à résoudre, pour $f \in L^2(\Omega)$, le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}. \quad (2.3)$$

Compte tenu des hypothèses sur la fonction σ , on peut trouver une fonction $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et une fonction $u^- \in H_0^1(\Omega)$ telles que $a(u^+, u^+) > 0$ et $a(u^-, u^-) < 0$. C'est évident si σ est une fonction localement continue au voisinage d'un point où elle prend une valeur strictement positive et au voisinage d'un point où elle prend une valeur strictement négative, mais c'est également vrai dans le cas général (en considérant des points de Lebesgue de la fonction). Ceci permet de vérifier que la forme bilinéaire $a(u, v)$ n'est pas coercive. En effet, il suffit de remarquer que la fonction $t \mapsto a(tu^+ + (1-t)u^-, tu^+ + (1-t)u^-)$ s'annule nécessairement pour une valeur de t entre 0 et 1, donc il existe $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, tel que $a(u, u) = 0$.

Le problème (P) peut être défini de façon équivalente comme la recherche de $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$$

au sens des distributions dans Ω .

On s'intéressera plus particulièrement au cas où σ est une fonction constante par morceaux, telle que

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_j \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad j = 1, 2.$$

D'après (2.1), on a dans ce cas

$$\sigma_1 > 0 \text{ et } \sigma_2 < 0.$$

Toujours dans ce cas, si on note $u_j = u|_{\Omega_j}$ pour $j = 1, 2$, le couple (u_1, u_2) vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_j = \frac{f}{\sigma_j} \text{ dans } \Omega_j, \quad j = 1, 2, \\ u_j = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_j, \quad j = 1, 2, \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où $\partial/\partial n$ désigne la dérivée normale sur Σ , la normale étant orientée par exemple de Ω_1 vers Ω_2 . Cette dernière équation peut se réécrire comme suit

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \kappa \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ sur } \Sigma, \quad \text{avec } \kappa = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

On dira que κ est le contraste. Toute la difficulté vient du fait que κ est négatif.

2.2 La T-coercivité

La forme bilinéaire $a(u, v)$ n'étant pas coercive, nous ne pouvons pas espérer montrer le caractère bien posé du problème (P) à l'aide du théorème de Lax-Migram. Nous allons utiliser le concept de T-coercivité qui est une reformulation de la condition inf-sup (cf. § 2.3.2).

Définition 2.1 Soit V un espace de Hilbert et $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue de $V \times V$ (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}). On dit que la forme bilinéaire $a(u, v)$ est T-coercive sur V s'il existe un opérateur T continu de V dans V et bijectif tel que la forme bilinéaire qui à $(u, v) \in V \times V$ associe $a(u, Tv)$ est coercive sur V .

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.2 Soit V un espace de Hilbert, $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et ℓ une forme linéaire continue sur V . On suppose de plus que la forme bilinéaire $a(u, v)$ est T-coercive sur V . Alors le problème

$$\begin{cases} u \in V, \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.5)$$

est bien posé.

Démonstration : La preuve est immédiate. En effet, le problème (2.5) est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} u \in V, \\ a(u, Tv) = \ell(Tv), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

qui est bien posé d'après le théorème de Lax-Milgram. ■

Supposons qu'on soit dans le cadre du théorème précédent. Que peut-on en déduire concernant la discrétisation du problème? La situation favorable est décrite dans le théorème suivant :

Théorème 2.3 Sous les hypothèses du théorème 2.2, on note V_h un sous-espace de dimension finie de V tel que

$$\mathbf{T}(V_h) \subset V_h. \quad (2.6)$$

Alors le problème suivant

$$\begin{cases} u_h \in V_h, \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (2.7)$$

est bien posé, et il existe une constante $C > 0$, indépendante du choix de V_h , telle que

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \quad (2.8)$$

où u désigne la solution du problème (2.5) et u_h celle du problème (2.7).

Démonstration : On peut tout d'abord remarquer que nécessairement $\mathbf{T}(V_h) = V_h$. Par conséquent, le problème suivant est équivalent à (2.9) :

$$\begin{cases} u_h \in V_h, \\ a(u_h, \mathbf{T}v_h) = \ell(\mathbf{T}v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.9)$$

Il suffit alors de raisonner comme dans la démonstration du lemme de Céa : on a

$$a(u_h, \mathbf{T}(u_h - v_h)) = 0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

d'où

$$a(u - u_h, \mathbf{T}(u - u_h)) = a(u - u_h, \mathbf{T}(u - v_h)).$$

On en déduit que pour tout $v_h \in V_h$

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq |a(u - u_h, \mathbf{T}(u - u_h))| = |a(u - u_h, \mathbf{T}(u - v_h))| \leq c \|\mathbf{T}\| \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$$

où $\alpha > 0$ est la constante de \mathbf{T} -coercivité et c la constante de continuité de $a(u, v)$. Le résultat s'en déduit avec $C = c\|\mathbf{T}\|/\alpha$. ■

L'objectif dans la suite du chapitre est de construire des opérateurs \mathbf{T} tels que la forme bilinéaire $a(u, v)$ définie en (2.3) soit \mathbf{T} -coercive.

2.3 Le cas des contrastes grands ou petits

On cherche donc un opérateur \mathbf{T} continu et bijectif de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même, pour lequel

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \left| \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla (\mathbf{T}u) \right| \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2. \quad (2.10)$$

On remarque qu'on a utilisé ici le fait que la semi-norme H^1 est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ grâce à l'inégalité de Poincaré.

On se place dans le cas décrit à la fin du §2.1 où σ prend deux valeurs constantes de signes opposés de part et d'autre de Σ . La difficulté venant du changement de signe de σ , on souhaiterait que l'opérateur \mathbf{T} combatte en quelque sorte ce changement de signe. Un choix tentant serait de poser $\mathbf{T}u = u$ là où σ est positif, et $\mathbf{T}u = -u$ là où σ est négatif. Mais malheureusement, ceci n'est pas possible puisque $\mathbf{T}u$ ainsi défini n'appartient pas en général à $H^1(\Omega)$. En effet, si u ne s'annule pas sur l'interface Σ , alors $\mathbf{T}u$ construit ainsi aurait un saut de trace à travers Σ , égal à $2u$. L'idée est alors de corriger cette définition pour rétablir l'appartenance de $\mathbf{T}u$ à $H^1(\Omega)$ (et à $H_0^1(\Omega)$).

On notera dans la suite pour $j = 1, 2$

$$H_{0,\Sigma}^1(\Omega_j) = \{u|_{\Omega_j}; u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Autrement dit, $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_j)$ contient les fonctions de $H^1(\Omega_j)$ qui s'annule sur $\partial\Omega_j \cap \partial\Omega$ mais pas, en général, sur Σ .

Lemme 2.4 Soit \mathbf{R} un opérateur linéaire continu de $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1)$ dans $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_2)$ tel que

$$\forall u_1 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1) \quad (\mathbf{R}u_1)|_\Sigma = (u_1)|_\Sigma \quad (2.11)$$

Alors l'opérateur \mathbf{T} défini pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ par

$$\mathbf{T}u = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -u + 2\mathbf{R}u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

est un opérateur linéaire continu de $H_0^1(\Omega)$ dans lui-même qui vérifie

$$(\mathbf{T} \circ \mathbf{T})u = u \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

C'est donc en particulier un opérateur bijectif.

Démonstration : On peut vérifier que les traces de $\mathbf{T}u$ de part et d'autre de Σ coïncident bien puisqu'on a sur Σ :

$$u_1 = -u_2 + 2\mathbf{R}u_1 = -u_1 + 2u_1,$$

où l'on a utilisé (2.11) et la continuité de u à travers Σ . Il est alors facile de vérifier que $\mathbf{T}u \in H_0^1(\Omega)$. La continuité de \mathbf{T} résulte ensuite de la continuité de \mathbf{R} . Enfin, un calcul simple montre que

$$(\mathbf{T} \circ \mathbf{T})u = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_1 \\ -\mathbf{T}u + 2\mathbf{R}u_1 = -(-u + 2\mathbf{R}u_1) + 2\mathbf{R}u_1 = u & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

■

Remarque 2.5 Il existe de nombreux opérateurs \mathbf{R} remplissant les conditions du lemme. On peut penser par exemple au relèvement harmonique, qui consiste à poser $\mathbf{R}u = \phi$ où ϕ est l'unique solution du problème suivant :

$$\Delta\phi = 0 \text{ dans } \Omega_2, \quad \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \quad \text{et} \quad \phi = u_1 \text{ sur } \Sigma.$$

Nous allons maintenant chercher à voir sous quelles conditions $a(u, v)$ est \mathbf{T} -coercive.

Théorème 2.6 On suppose qu'il existe un opérateur \mathbf{R} , linéaire continu de $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1)$ dans $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_2)$, vérifiant (2.11), et tel que pour une constante $C > 0$, on a :

$$\int_{\Omega_2} |\nabla(\mathbf{R}u_1)|^2 \leq C \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2, \quad \forall u_1 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1). \quad (2.13)$$

Alors la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$$

est \mathbf{T} -coercive sur $H_0^1(\Omega)$ dès que le contraste $\kappa = \sigma_2/\sigma_1$ vérifie

$$\kappa > -\frac{1}{\|\mathbf{R}\|^2} \quad (2.14)$$

où l'on a posé

$$\|\mathbf{R}\| = \sup_{u_1 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1), u_1 \neq 0} \frac{\sqrt{\int_{\Omega_2} |\nabla(\mathbf{R}u_1)|^2}}{\sqrt{\int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2}}.$$

Notons que la condition (2.13) est plus forte que la condition de continuité de \mathbf{R} , puisqu'on a à droite uniquement la semi-norme H^1 . Elle est automatiquement vérifiée dès que l'on a une inégalité de Poincaré sur Ω_1 , puisqu'alors la semi-norme est équivalente à la norme sur $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1)$. C'est le cas par exemple pour les deux domaines de la figure 2.1 car on a une condition de Dirichlet sur une partie du bord de Ω_1 .

Démonstration : Prenons $u \in H_0^1(\Omega)$ et calculons $a(u, \mathbf{T}u)$. par définition, on a

$$a(u, \mathbf{T}u) = \sigma_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 + \sigma_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot (-\nabla u_2 + 2\nabla(\mathbf{R}u_1)).$$

On en déduit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$a(u, \mathbf{T}u) \geq \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 - 2|\sigma_2| \sqrt{\int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2} \sqrt{\int_{\Omega_2} |\nabla(\mathbf{R}u_1)|^2}$$

qui implique, par définition de $\|\mathbf{R}\|$:

$$a(u, \mathbf{T}u) \geq \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 - 2|\sigma_2| \|\mathbf{R}\| \sqrt{\int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2} \sqrt{\int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2}.$$

L'inégalité de Young nous dit alors que pour tout $\delta > 0$, on a

$$2\sqrt{\int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2} \sqrt{\int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2} \leq \delta \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2.$$

En combinant les deux dernières inégalités, on trouve que pour tout $\delta > 0$, on a

$$a(u, \mathbf{T}u) \geq \left(\sigma_1 - \frac{1}{\delta} |\sigma_2| \|\mathbf{R}\| \right) \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 + |\sigma_2| (1 - \delta \|\mathbf{R}\|) \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2,$$

ce qui prouve la T-coercivité à condition que

$$\frac{|\sigma_2| \|\mathbf{R}\|}{\sigma_1} < \delta < \frac{1}{\|\mathbf{R}\|},$$

d'où le résultat. ■

Nous venons de montrer que si le contraste est assez petit en valeur absolue, bien qu'il soit négatif, la forme bilinéaire $a(u, v)$ est T-coercive, de sorte que le problème de transmission (P) est bien posé. Dans notre approche, nous avons choisi d'introduire le terme correctif $\mathbf{R}u_1$ dans la définition de $\mathbf{T}u$ sur Ω_2 . Mais on peut multiplier σ et f par -1 , et inverser les rôles de Ω_1 et Ω_2 . On montre ainsi exactement de la même façon que le problème (P) est bien posé pour des contrastes assez grands en valeur absolue, à condition d'avoir également une condition de Dirichlet sur une partie du bord de Ω_2 , ce qui est vrai pour le domaine de gauche mais ne l'est pas pour le domaine de droite de la figure 2.1. Tout ceci est résumé dans le théorème suivant.

Théorème 2.7 *Soient $R_{1 \rightarrow 2}$ un opérateur linéaire continu de $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1)$ dans $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_2)$ et $R_{2 \rightarrow 1}$ un opérateur linéaire continu de $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_2)$ dans $H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1)$ tels que*

$$\forall u_1 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1), \forall u_2 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_2) \quad (\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} u_1)|_{\Sigma} = (u_1)|_{\Sigma} \text{ et } (\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2)|_{\Sigma} = (u_2)|_{\Sigma}, \quad (2.15)$$

et tels que pour une constante $C > 0$:

$$\left| \begin{aligned} \int_{\Omega_2} |\nabla(\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} u_1)|^2 &\leq C \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2, \quad \forall u_1 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1), \\ \int_{\Omega_1} |\nabla(\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2)|^2 &\leq C \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2, \quad \forall u_2 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_2). \end{aligned} \right. \quad (2.16)$$

Alors la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$$

est \mathbf{T} -coercive sur $H_0^1(\Omega)$ dès que le contraste $\kappa = \sigma_2/\sigma_1$ vérifie

$$\kappa \notin \left[-\|\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}\|^2, -\frac{1}{\|\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}\|^2} \right], \quad (2.17)$$

où l'on a posé

$$\|\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}\| = \sup_{u_1 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_1), u_1 \neq 0} \frac{\sqrt{\int_{\Omega_2} |\nabla(\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} u_1)|^2}}{\sqrt{\int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}\| = \sup_{u_2 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_2), u_2 \neq 0} \frac{\sqrt{\int_{\Omega_1} |\nabla(\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2)|^2}}{\sqrt{\int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2}}.$$

Sous cette condition, le problème de transmission (P) est bien posé.

Remarque 2.8 — Considérons le domaine de droite de la figure 2.1. Alors il n'existe aucun opérateur $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}$ vérifiant

$$\int_{\Omega_1} |\nabla(\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2)|^2 \leq C \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2, \quad \forall u_2 \in H_{0,\Sigma}^1(\Omega_2)$$

car on peut prendre $u_2 = c$ constant dans Ω_2 , mais dans ce cas u_2 doit être également constant égal à c dans Ω_1 , ce qui est impossible si $c \neq 0$ à cause de la condition de Dirichlet. On ne peut donc pas appliquer cette démarche, mais le résultat demeure vrai et peut se démontrer par d'autres approches : le problème est bien posé pour un contraste assez proche de 0.

— Dans le cas où σ est une fonction variable dans chaque sous-domaine, on peut montrer que le problème (P) est bien posé dès lors que

$$\frac{\sup_{x \in \Omega_2} |\sigma_2(\mathbf{x})|}{\inf_{x \in \Omega_1} \sigma_1(\mathbf{x})} < \frac{1}{\|\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}\|^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\inf_{x \in \Omega_2} |\sigma_2(\mathbf{x})|}{\sup_{x \in \Omega_1} \sigma_1(\mathbf{x})} > \|\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}\|^2.$$

2.4 Le cas des domaines symétriques

On va considérer dans ce paragraphe le cas particulier où Ω symétrique par rapport à Σ . Pour fixer les idées, on note $\mathbf{x} = (x, y, z)$ si on est dans \mathbb{R}^3 et $\mathbf{x} = (x, y)$ si on est dans \mathbb{R}^2 , et on va supposer que Σ est contenu dans l'hyperplan $x = 0$. On note alors S l'application qui \mathbf{x} associe son symétrique par rapport à l'axe $x = 0$. Autrement dit,

$$S(x, y, z) = (-x, y, z) \text{ en 3D, et } S(x, y) = (-x, y) \text{ en 2D.}$$

On démontre alors le résultat suivant.

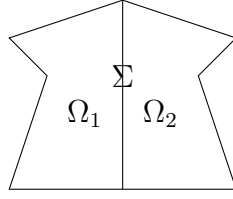


FIGURE 2.2 – Exemple de domaine symétrique

Théorème 2.9 *Supposons que $S(\Omega_1) = \Omega_2$. Alors le problème (P) est bien posé si et seulement si le contraste κ est différent de -1 .*

Démonstration :

Étape 1 : supposons que $\kappa \neq -1$ et montrons que le problème (P) est bien posé. D’après le théorème 2.7, il suffit de construire des opérateurs $R_{1 \rightarrow 2}$ et $R_{2 \rightarrow 1}$ de normes égales à 1. Or ceci est réalisé de façon très simple en posant

$$R_{1 \rightarrow 2}u_1 = u_1 \circ S \text{ et } R_{2 \rightarrow 1}u_2 = u_2 \circ S.$$

En effet, d’une part la condition (2.15) est bien vérifiée puisque pour $\mathbf{x} \in \Sigma$, $S\mathbf{x} = \mathbf{x}$. D’autre part, par exemple en 2D :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |\nabla(u_1 \circ S)| d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_2} \left[\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x}(-x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}(-x, y) \right)^2 \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_1} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_1} |\nabla u_1| d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On pourra vérifier à titre d’exercice que les opérateurs $R_{1 \rightarrow 2}$ et $R_{2 \rightarrow 1}$ construits à l’aide du relèvement harmonique (cf. remarque 2.5) sont également de normes égales à 1.

Étape 2 : il reste à montrer que le problème (P) est mal posé quand $\kappa = -1$. Pour cela, il suffit de remarquer que dans ce cas, le problème admet un noyau de dimension infinie. Plus précisément, notons V_Σ l’espace des traces des fonctions de $H_0^1(\Omega)$:

$$V_\Sigma = \{u|_\Sigma; u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Alors pour tout $\varphi \in V_\Sigma$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $u|_\Sigma = \varphi$ et tel que pour $j = 1, 2$, $\Delta u = 0$ dans Ω_j . De plus, à cause de la symétrie et de l’unicité du problème de Dirichlet, on a $u \circ S = u$. En 2D par exemple, on a donc

$$u(-x, y) = u(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

d’où l’on déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0+, y) = -\frac{\partial u}{\partial x}(0-, y) \quad \forall (0, y) \in \Sigma.$$

Donc u est une solution de (2.4) avec $\sigma_2 = -\sigma_1$. ■

Supposons maintenant que l’on ait $S(\Omega_1) = \Omega_2$ et que le contraste κ soit différent de -1 , de sorte que le problème (P) soit bien posé. On veut alors le résoudre par éléments finis. D’après le théorème 2.3, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.10 *Supposons que $S(\Omega_1) = \Omega_2$ et que le contraste κ est différent de -1 . Soit V_h un sous-espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ tel que $\mathbb{T}(V_h) \subset V_h$ pour les opérateurs \mathbb{T} suivants :*

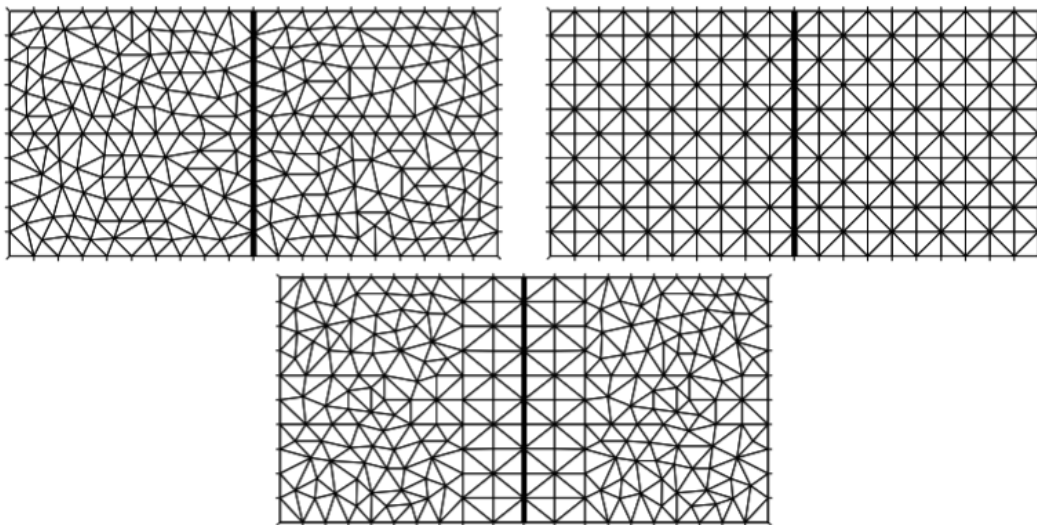
$$\mathbb{T}u_h = \begin{cases} u_h & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_h + 2u_h \circ S & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} \quad \text{et } \mathbb{T}u_h = \begin{cases} u_h - 2u_h \circ S & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_h & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}, \quad (2.18)$$

alors le problème suivant (où $a(u, v)$ et $\ell(v)$ sont définis par (2.3))

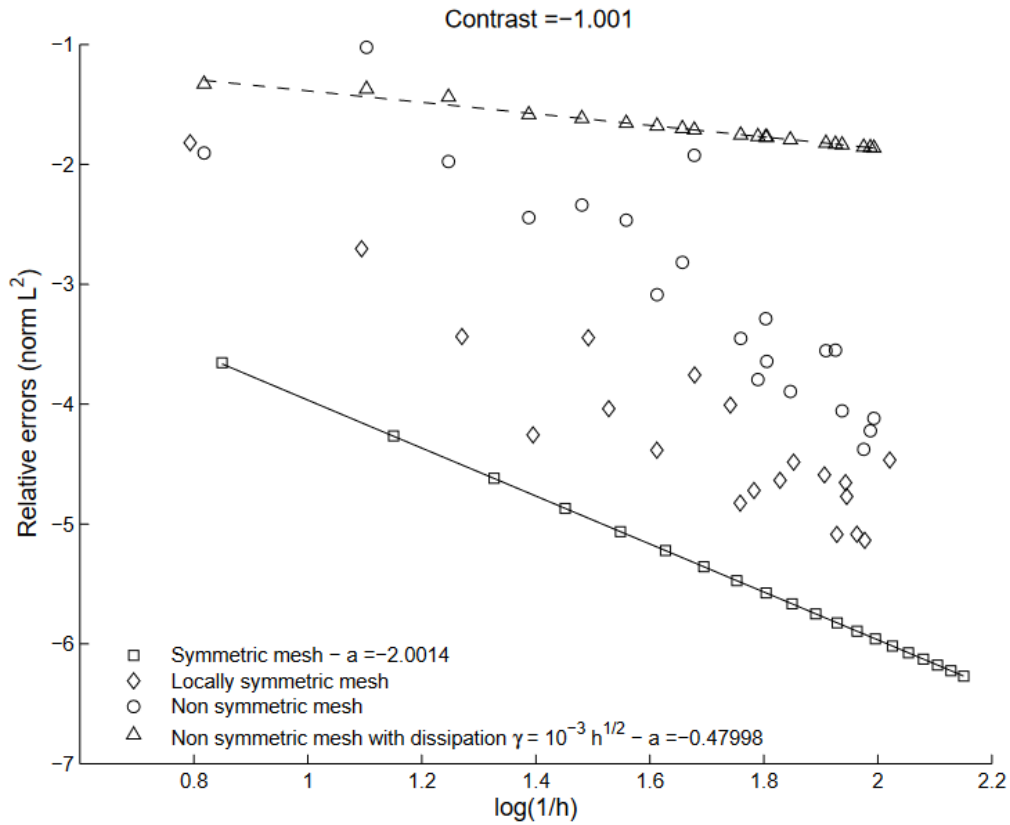
$$(P_h) \quad \begin{cases} u_h \in V_h, \\ a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases}$$

est bien posé, et on a l'estimation d'erreur (2.8) où u désigne la solution du problème (P) et u_h celle du problème (P_h) .

Concrètement, cela signifie que pour résoudre (P) par éléments finis et assurer la convergence de la méthode, il suffit de construire un maillage symétrique (et d'utiliser le même ordre d'éléments de part et d'autre de l'interface). En pratique, on observe en effet de bien meilleurs résultats lorsque l'on utilise un maillage symétrique, même si la méthode semble converger avec un maillage quelconque (ce qui est prouvé sous certaines conditions moins fortes que la symétrie du maillage). Les résultats suivants sont tirés de [13].



Trois exemples de maillages, non-symétrique en haut à gauche, symétrique en haut à droite, et localement symétrique au voisinage de l'interface en bas.



On observe pour un contraste $\kappa = -1,001$, donc très proche du cas critique -1 , une convergence monotone très satisfaisante lorsque le maillage est symétrique, et qui se détériore totalement lorsqu'il ne l'est plus.

2.5 Le cas des interfaces à coin

2.5.1 Le carré dans un carré

Considérons maintenant en 2D la géométrie suivante pour laquelle Ω_2 correspond au quart du carré Ω . Pour fixer les idées, on pose :

$$\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[\text{ et } \Omega_2 =]0, 1[\times]0, 1[.$$

Alors on a le résultat suivant :

Théorème 2.11 *On considère la géométrie ci-dessus. Alors le problème (P) est bien posé si le contraste κ n'appartient pas à l'intervalle $] -3, -1/3[$.*

Démonstration : Il suffit de construire des opérateurs $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}$ de normes au carré égales à 3.

— Pour la construction de $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}$, les symétries du domaine conduisent naturellement à poser

$$\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2(x, y) = \begin{cases} u_2(-x, y) & \text{si } (x, y) \in]-1, 0[\times]0, 1[, \\ u_2(x, -y) & \text{si } (x, y) \in]0, 1[\times]-1, 0[, \\ u_2(-x, -y) & \text{si } (x, y) \in]-1, 0[\times]-1, 0[. \end{cases}$$

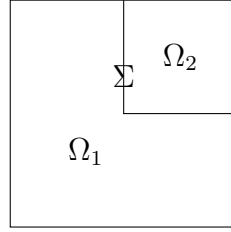


FIGURE 2.3 – Exemple où l’interface a un angle droit

Il est clair que cet opérateur est admissible au sens où $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2$ appartient à H^1 dans chaque sous-domaine, est continu aux interfaces, s’annule sur la frontière extérieure et enfin vérifie la condition (2.15). Enfin, il est facile de voir que

$$\int_{\Omega_1} |\nabla(\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2)|^2 d\mathbf{x} = 3 \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 d\mathbf{x}.$$

— La construction de $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}$ se fait par une sorte de repliement. On pose

$$\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} u_1(x, y) = u_1(-x, y) - u_1(-x, -y) + u_1(x, -y),$$

et à nouveau, on vérifie que cet opérateur vérifie toutes les conditions requises. Enfin, pour calculer sa norme, on utilise l’inégalité suivante (que l’on peut voir comme une conséquence de l’inégalité de Cauchy-Schwarz), valable pour tout M -uplet de réels a_1, a_2, \dots, a_M :

$$\left(\sum_{i=1}^M a_i \right)^2 \leq M \sum_{i=1}^M a_i^2. \tag{2.19}$$

On a donc

$$\int_{\Omega_2} |\nabla(\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} u_1)|^2 d\mathbf{x} \leq 3 \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 d\mathbf{x},$$

l’égalité étant réalisée si pour $x, y > 0$, on a

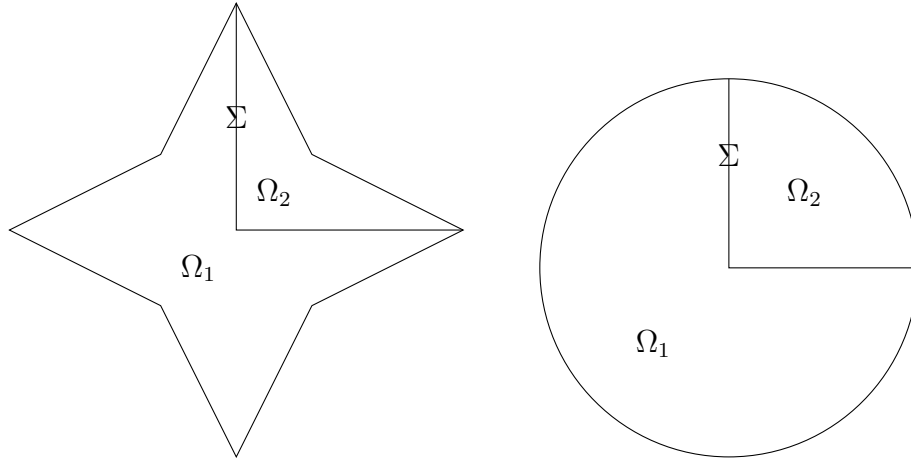
$$u_1(-x, y) = u_1(x, -y) = -u_1(-x, -y).$$

■

Remarque 2.12 *On peut noter que l’intervalle interdit contient la valeur -1 qui était interdite dans le cas des domaines symétriques.*

A nouveau, la construction des opérateurs $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}$ par symétrie permet d’énoncer le résultat suivant pour le problème discret :

Théorème 2.13 *Supposons que le contraste κ n’appartient pas à l’intervalle $[-3, -1/3]$. Soit V_h un sous-espace éléments finis de $H_0^1(\Omega)$, construit à l’aide d’un maillage possédant la double symétrie en x et en y , alors le problème (P_h) est bien posé, et on a l’estimation d’erreur (2.8) où u désigne la solution du problème (P) et u_h celle du problème (P_h) .*

FIGURE 2.4 – Domaines symétriques en x et en y .

Remarque 2.14 — On peut remarquer que les résultats précédents s'appliquent directement à toute géométrie possédant cette double symétrie en x et en y , comme par exemple celles de la figure 2.4.

- Contrairement au cas des domaines symétriques, nous n'avons réussi à démontrer le caractère bien-posé du problème (P) dans ces géométries que pour un contraste à l'extérieur de l'intervalle $[-3, -1/3]$. En fait, on peut démontrer que ce résultat est optimal, et que dès que l'interface présente un angle droit, le problème devient mal posé à l'intérieur de cet intervalle. C'est pourquoi on l'appelle l'intervalle critique, le 3 correspondant exactement au rapport entre les deux angles de part et d'autre du coin, $3\pi/2$ et $\pi/2$.
- On peut établir des résultats similaires en 3D, par exemple pour un cube dans un cube : $\Omega_2 = \{(x, y, z); 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$ et $\Omega = \{(x, y, z); |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1\}$. On montre alors que le problème est bien posé si $\kappa \notin [-7, -1/7]$, mais contrairement au cas 2D, ce résultat n'est pas optimal.

2.5.2 Le camembert

Que se passe-t-il si l'interface présente un coin d'angle α quelconque ? On va considérer le cas où Ω est un disque dont un secteur constitue Ω_2 :

Plus précisément, en repérant les points par leurs coordonnées polaires, on pose $\Omega = \{(r, \theta); r \leq 1\}$ et $\Omega_2 = \{(r, \theta); 0, \theta < \alpha \text{ et } r \leq 1\}$. On démontre alors le résultat suivant :

Théorème 2.15 On considère la géométrie ci-dessus. Alors le problème (P) est bien posé si le contraste κ n'appartient pas à l'intervalle $] -\mathcal{I}_\alpha, -1/\mathcal{I}_\alpha[$ où

$$\mathcal{I}_\alpha = \max\left(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha}, \frac{\alpha}{2\pi - \alpha}\right).$$

Remarque 2.16 — On remarque que ce résultat est identique à celui du paragraphe précédent lorsque $\alpha = \pi/2$, puisque \mathcal{I}_α est alors égal à 3.

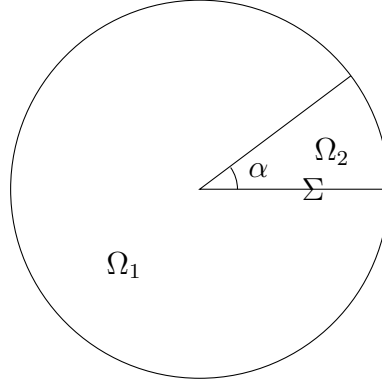


FIGURE 2.5 – Le camembert.

- On peut aussi noter que si $\alpha = \pi$, $\mathcal{I}_\alpha = 1$ et on retrouve le résultat du cas symétrique.
- Enfin, on note que plus l'angle est petit, plus l'intervalle critique est grand, tendant à la limite à remplir tout l'axe réel négatif.

Démonstration : Il suffit de construire des opérateurs $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}$ de normes au carré égales à \mathcal{I}_α . On propose pour cela de choisir par exemple $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}$ de la forme suivante, où γ est un paramètre réel positif à fixer :

$$\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2(r, \theta) = u(r, -\gamma\theta).$$

Il est clair que

$$\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2(r, 0) = u(r, 0),$$

mais on veut également

$$\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2(r, -2\pi + \alpha) = u(r, \alpha),$$

ce qui est réalisé en prenant

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\pi - \alpha}.$$

On calcule alors la norme de l'opérateur :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |\nabla(\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2)|^2 d\mathbf{x} &= \int_{-2\pi + \alpha}^0 d\theta \int_0^1 r dr \left(\left| \frac{\partial}{\partial r} (u(r, -\gamma\theta)) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{r \partial \theta} (u(r, -\gamma\theta)) \right|^2 \right) \\ &= \int_{-2\pi + \alpha}^0 d\theta \int_0^1 r dr \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} (r, -\gamma\theta) \right|^2 + \gamma^2 \left| \frac{\partial u}{r \partial \theta} (r, -\gamma\theta) \right|^2 \right) \\ (\theta' = -\gamma\theta) &= \int_0^\alpha \frac{1}{\gamma} d\theta' \int_0^1 r dr \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} (r, \theta') \right|^2 + \gamma^2 \left| \frac{\partial u}{r \partial \theta} (r, \theta') \right|^2 \right) \\ &\leq \max(\gamma, 1/\gamma) \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

qui est le résultat attendu. On peut de faire de même pour l'opérateur $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}$. ■

L'inconvénient de la construction proposée dans cette preuve est qu'elle ne "passe pas" au discret, au sens où ne peut pas réaliser la condition $\mathbf{T}(V_h) \subset V_h$ avec des éléments finis. C'est pourquoi une construction alternative a été proposée, qui fonctionne lorsque l'angle α est un multiple rationnel de π [9].

2.6 Une idée de la démarche générale

2.6.1 T-coercivité et localisation

Pour une géométrie arbitraire comme sur la figure 2.1, on ne peut pas construire de façon aussi simple un opérateur T assurant la T -coercivité pour certaines valeurs du contraste. On décide alors d'être moins exigeant. Au lieu de chercher à restaurer la coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$, on va se contenter d'obtenir la coercivité "à une perturbation compacte près". On s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème 2.17 *Soit V un espace de Hilbert, $a(u, v)$ et $b(u, v)$ deux formes bilinéaires continues sur $V \times V$ et ℓ une forme linéaire continue sur V . On suppose que la forme bilinéaire $a(u, v) + b(u, v)$ est T -coercive sur V et que l'opérateur K linéaire continu sur V défini par*

$$(Ku, v)_V = b(u, v)$$

est compact. Alors le problème

$$\begin{cases} u \in V, \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.20)$$

relève de l'alternative de Fredholm : il est bien posé si et seulement si le problème homogène l'est.

Démonstration : En effet, si on note A l'opérateur linéaire continu sur V défini par

$$(Au, v)_V = a(u, v),$$

les hypothèses du théorème permettent de montrer que $A + K$ est un isomorphisme. ■

Nous allons appliquer ce théorème à l'exemple suivant. On suppose que

$$\Omega = \{(x, y); -d < x < 1, 0 < y < 1\},$$

et

$$\Omega_1 = \{(x, y); -d < x < 0, 0 < y < 1\} \text{ et } \Omega_2 = \{(x, y); 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

où d est un réel positif. Dans le cas où $d = 1$, on a vu que le problème (P) est bien posé si et seulement si $\kappa \neq -1$. On voudrait maintenant savoir ce qu'on peut dire si $d \neq 1$. Supposons pour fixer les idées que $d > 1$. En procédant comme dans la preuve du théorème 2.9, on peut montrer que (P) est bien posé si $\kappa < -1$. En effet, si S désigne la symétrie par rapport à l'interface $\Sigma = \{(x, y) \in \Omega; x = 0\}$, on peut définir un opérateur $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1}$ comme suit :

$$\mathbf{R}_{2 \rightarrow 1} u_2(x, y) = \begin{cases} u_2(-x, y) & \text{si } (x, y) \in]-1, 0[\times]0, 1[, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in]-d, -1[\times]0, 1[. \end{cases}$$

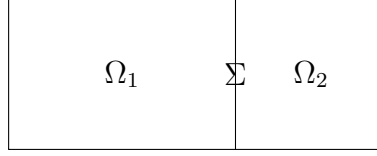


FIGURE 2.6 – Domaine rectangulaire

En revanche, on ne peut pas aussi facilement construire un opérateur $R_{1 \rightarrow 2}$. Comme on sait que la difficulté vient du changement de signe de σ à travers l'interface Σ , on introduit une fonction de troncature χ telle que $\chi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ est à valeurs dans $[0, 1]$ et vérifie $\chi(0) = 1$. Ici pour simplifier, on peut choisir la fonction χ paire : $\chi(-x) = \chi(x)$. On définit alors l'opérateur $R_{1 \rightarrow 2}$ comme suit :

$$R_{1 \rightarrow 2}u_1(x, y) = \chi(x)u_1(-x, y), \quad \forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$$

et l'opérateur T associé :

$$Tu(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{pour } (x, y) \in \Omega_1 \\ -u(x, y) + 2\chi(x)u(-x, y) & \text{pour } (x, y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

On a alors pour $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, Tu) = \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - 2|\sigma_2| \int_{\Omega_2} \nabla u(x, y) \cdot \nabla (\chi(x)u(-x, y)) d\mathbf{x}.$$

Cela nous conduit à poser :

$$b(u, Tv) = 2|\sigma_2| \int_{\Omega_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \chi'(x)v(-x, y) d\mathbf{x},$$

de sorte que

$$a(u, Tu) + b(u, Tu) = \int_{\Omega} |\sigma| |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - 2|\sigma_2| \int_{\Omega_2} \nabla u(x, y) \cdot \nabla (\chi(x)u(-x, y)) d\mathbf{x}.$$

Il est très facile en reproduisant la preuve du théorème 2.6 de montrer que $a(u, v) + b(u, v)$ est T -coercive sur $H_0^1(\Omega)$ dès que $\kappa > -1$. Il ne reste plus qu'à montrer la compacité de l'opérateur K associé à la forme $b(u, v)$. On peut de façon équivalente montrer la compacité de $K \circ T$ qui vérifie :

$$((K \circ T)u, v)_{H_0^1(\Omega)} = b(u, Tv), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Soit donc u_n une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$, de norme inférieure ou égale à 1. on veut montrer qu'elle admet une sous-suite $u_{n'}$ telle que $v_{n'} := (K \circ T)u_{n'}$ converge dans $H_0^1(\Omega)$. On commence par extraire une sous-suite $v_{n'}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, ce qui est possible d'après le lemme de Rellich puisque Ω est borné. On a alors :

$$\|v_{n'} - v_{m'}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = 2|\sigma_2| \int_{\Omega_2} \frac{\partial(u_{n'} - u_{m'})}{\partial x}(x, y) \chi'(x)(v_{n'} - v_{m'})(-x, y) d\mathbf{x},$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|v_{n'} - v_{m'}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2|\sigma_2| \|u_{n'} - u_{m'}\|_{H_0^1(\Omega)} \|v_{n'} - v_{m'}\|_{L^2(\Omega_2)}$$

qui permet de conclure.

2.6.2 Modes plasmoniques

En poursuivant sur l'exemple précédent, si $\kappa \neq -1$, on sait que le problème (P) est bien posé si et seulement si le problème homogène l'est. Il suffit donc de chercher des solutions du problème homogène suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_j = 0 \text{ dans } \Omega_j, j = 1, 2, \\ u_j = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_j, j = 1, 2, \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right. \quad (2.21)$$

La séparation de variables conduit à rechercher, pour chaque entier $n \geq 1$, des solutions de la forme :

$$u_j(x, y) = \varphi_j(x) \sin(n\pi y), \quad j = 1, 2.$$

Les deux premières équations de (2.21) imposent alors l'existence de constantes A_1 et A_2 telles que

$$\varphi_1(x) = A_1 \sinh(n\pi(x + d)) \text{ et } \varphi_2(x) = A_2 \sinh(n\pi(x - 1)).$$

Les deux dernières équations de (2.21) conduisent alors au système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \sinh(n\pi d) = A_2 \sinh(n\pi) \\ \sigma_1 A_1 \cosh(n\pi d) = -\sigma_2 A_2 \cosh(n\pi) \end{array} \right.$$

qui n'admet de solution non triviale que si

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{\tanh(n\pi)}{\tanh(n\pi d)}.$$

On trouve donc une suite de contrastes $\kappa_n = -\tanh(n\pi)/\tanh(n\pi d)$, $n \geq 1$ pour lesquels le problème (P) est mal posé, et possède un noyau de dimension 1. Cette suite de contrastes tend vers -1. Pour un contraste κ qui n'est ni égal à -1, ni égal à l'un de ces κ_n , le problème homogène n'a que la solution triviale, et le problème de départ est donc bien posé.

Les modes que nous avons calculés sont appelés les modes plasmoniques.

Bibliographie

- [1] **R.A. Adams, J.J.F. Fournier**, *Sobolev spaces. Second edition*, Academic Press, New York (2003).
- [2] **D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin**, *Mixed and hybrid finite element methods and applications*, Springer-Verlag (2013).
- [3] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris (1983). *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer (2011).
- [4] **J. Bussac, P. Reuss**, *Traité de neutronique*, Hermann, Paris (1985).
- [5] **P. Ciarlet Jr., E. Jamelot, F. Kpadonou**, Domain decomposition methods for the diffusion equation with low-regularity solution, *Computers Math. Applic.*, **74**, p. 2369–2384 (2017).
- [6] **P. Ciarlet Jr., E. Lunéville**, *La méthode des éléments finis : aspects fondamentaux, de la théorie à la pratique*, Editions ISTE (à paraître).
- [7] **V. Girault, P.-A. Raviart**, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, **5**, Springer Verlag, Berlin (1986).
- [8] **P. Grisvard**, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman, London (1985).
- [9] **A.-S. Bonnet-Ben Dhia, C. Carvalho, P. Ciarlet Jr.**, Mesh requirements for the finite element approximation of problems with sign-changing coefficients, *Numer. Math.*, **138**, 801–838 (2018).
- [10] **A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel, P. Ciarlet Jr.**, T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials, *Math. Mod. Num. Anal.*, **46**, 1363–1387 (2012).
- [11] **A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Ciarlet Jr., C. M. Zwölf**, Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients, *J. Comput. Appl. Math.*, **234**, 1912–1919 (2010). (Corrigendum *J. Comput. Appl. Math.*, **234**, 2616 (2010))
- [12] **C. Carvalho**, *Etude mathématique et numérique de structures plasmoniques avec des coins*, Thèse de l’Ecole Polytechnique (2015).

- [13] **L. Chesnel, P. Ciarlet Jr.**, T-coercivity and continuous Galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients, *Numer. Math.*, **124**, 1–29 (2013).
- [14] **M. Costabel, E. Stephan**, A direct boundary integral method for transmission problems, *J. of Math. Anal. and Appl.*, **106**, 367–413 (1985).
- [15] **S. Nicaise, J. Venel**, A posteriori error estimates for a finite element approximation of transmission problems with sign changing coefficients, *J. Comput. Appl. Math.*, **235**, 4272–4282 (2011).
- [16] **V.G. Veselago**, The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ , *Soviet Physics-Uspeski*, **10**, 509–514 (1968).
- [17] **J.B. Pendry**, Negative refraction makes a perfect lens, *Phys. Rev. Letters*, **85**, 3966–3969 (2000).
- [18] **G. Bouchitté, C. Bourel and D. Felbacq**, Homogenization near resonances and artificial magnetism in 3D dielectric metamaterials, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **225**, 1233–1277, (2017).