

# Résolution de l'équation des ondes dans un réseau infini

Adrien Semin

Travail en collaboration avec Katrin Boxberger, Patrick Joly et Bertrand Maury

INRIA Rocquencourt

Lundi 6 avril 2009

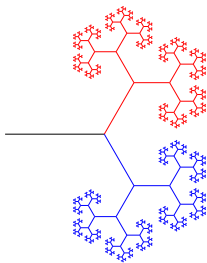
- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - Un problème modèle
  - Le problème de Laplace limite
  - Le problème de Helmholtz
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - Un problème modèle
  - Le problème de Laplace limite
  - Le problème de Helmholtz
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion

- Motivation : modélisation de la propagation du son dans un réseau de  **fils minces**
- Hypothèse de  **fils minces**  : épaisseur du fil  $\ll$  longueur d'onde
- Point connu (depuis longtemps) : le réseau a un nombre fini de jonctions
  - Modèle introduit par Kirchoff (début du XX<sup>e</sup>)
  - Première justification théorique récente (travaux de J. Rubinstein *et al*, P. Kuchment *et al*) - travaux en régime harmonique
  - Justification complète (2008) et amélioration du modèle existant par P. Joly et A. Semin
- Point inconnu : le réseau a une infinité de jonctions  
Point de départ :
  - Travaux de Y. Achdou *et al*
  - Article de B. Maury, D. Salort et C. Vannier

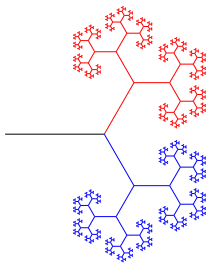
- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - Un problème modèle
  - Le problème de Laplace limite
  - Le problème de Helmholtz
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - Un problème modèle
  - Le problème de Laplace limite
  - Le problème de Helmholtz
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion



## Géométrie de l'arbre

- $\mathcal{R}$  : réseau géométrique du problème
- Hypothèse :  $\mathcal{R} = \widehat{\Sigma} \cup s_0(\mathcal{R}) \cup s_1(\mathcal{R}) \cup \dots \cup s_{p-1}(\mathcal{R})$ , avec  $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$  similitudes directes contractantes de rapports respectifs  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$
- Un tel arbre sera dit  $p$ -adique auto-similaire
- Construction des générations successives de l'arbre : [ici](#)



## Géométrie de l'arbre

- $\mathcal{R}$  : réseau géométrique du problème
- Hypothèse :  $\mathcal{R} = \widehat{\Sigma} \cup s_0(\mathcal{R}) \cup s_1(\mathcal{R}) \cup \dots \cup s_{p-1}(\mathcal{R})$ , avec  $(s_0, s_1, \dots, s_{p-1})$  similitudes directes contractantes de rapports respectifs  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$
- Un tel arbre sera dit  $p$ -adique auto-similaire
- Construction des générations successives de l'arbre : [ici](#)

## Buts

- Définir l'équation des ondes sur un tel réseau
- Préciser le traitement de l'infini du réseau
- Relier la solution de l'équation des ondes et sa dérivée à l'entrée du réseau



## Poids auto-similaire

Poids auto-similaire : toute fonction  $\mu$  définie sur  $\mathcal{R}$  et satisfaisant

- $\mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \mu(\mathbf{x})$  pour tout  $0 \leq i \leq p - 1$
- $\mu \geq C > 0$  sur  $\hat{\Sigma}$

## Poids auto-similaire

Poids auto-similaire : toute fonction  $\mu$  définie sur  $\mathcal{R}$  et satisfaisant

- $\mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \mu(\mathbf{x})$  pour tout  $0 \leq i \leq p - 1$
- $\mu \geq C > 0$  sur  $\widehat{\Sigma}$

## Espaces fonctionnels $L^2_\mu(\mathcal{R})$ et $H^1_\mu(\mathcal{R})$

$$L^2_\mu(\mathcal{R}) = \left\{ u / \int_{\mathcal{R}} \mu(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty \right\}$$

$$H^1_\mu(\mathcal{R}) = \left\{ u / \int_{\mathcal{R}} \mu(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 + \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty \right\}$$

## Poids auto-similaire

Poids auto-similaire : toute fonction  $\mu$  définie sur  $\mathcal{R}$  et satisfaisant

- $\mu(s_i(\mathbf{x})) = \mu_i \mu(\mathbf{x})$  pour tout  $0 \leq i \leq p - 1$
- $\mu \geq C > 0$  sur  $\hat{\Sigma}$

## Espaces fonctionnels $L^2_\mu(\mathcal{R})$ et $H^1_\mu(\mathcal{R})$

$$L^2_\mu(\mathcal{R}) = \left\{ u / \int_{\mathcal{R}} \mu(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty \right\}$$

$$H^1_\mu(\mathcal{R}) = \left\{ u / \int_{\mathcal{R}} \mu(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 + \mu(\mathbf{x}) |u'(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty \right\}$$

- Une fonction de  $H^1_\mu(\mathcal{R})$  est continue aux points de jonction de l'arbre,
- $H^1_{\mu,c}(\mathcal{R})$  l'ensemble des fonctions de  $H^1_\mu(\mathcal{R})$  à "support compact",
- $H^1_{\mu,0}(\mathcal{R})$  la fermeture de  $H^1_{\mu,c}(\mathcal{R})$  dans  $H^1_\mu(\mathcal{R})$ .

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - **Un problème modèle**
  - Le problème de Laplace limite
  - Le problème de Helmholtz
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion

Nous regardons le problème suivant à une fréquence  $\omega$  complexe fixée : trouver  $u \in H_{\mu}^1(\mathcal{R})$  (ou  $H_{\mu,0}^1(\mathcal{R})$ ) avec  $u = 1$  à l'entrée de l'arbre et tel que

$$\int_{\mathcal{R}} \mu u'(x) \overline{v}'(x) dx - \omega^2 \int_{\mathcal{R}} \mu u(x) \overline{v}(x) dx = 0 \quad \forall v \in H_{\mu}^1(\mathcal{R}) \text{ tel que } v = 0 \text{ à l'entrée}$$

On note  $\lambda(\omega)$  la valeur de  $u'$  à l'entrée de l'arbre.

Nous regardons le problème suivant à une fréquence  $\omega$  complexe fixée : trouver  $u \in H_{\mu}^1(\mathcal{R})$  (ou  $H_{\mu,0}^1(\mathcal{R})$ ) avec  $u = 1$  à l'entrée de l'arbre et tel que

$$\int_{\mathcal{R}} \mu u'(x) \overline{v'(x)} dx - \omega^2 \int_{\mathcal{R}} \mu u(x) \overline{v(x)} dx = 0 \quad \forall v \in H_{\mu}^1(\mathcal{R}) \text{ tel que } v = 0 \text{ à l'entrée}$$

On note  $\lambda(\omega)$  la valeur de  $u'$  à l'entrée de l'arbre.

### Théorème

Lorsque  $\Im(\omega) > 0$ , ce problème est bien posé.

*Preuve* : on utilise le théorème de Lax-Milgram

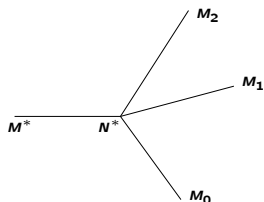
### Proposition

Il existe des fonctions complexes  $(r_i)_{0 \leq i \leq p-1}$  ne dépendant que de  $\omega$  pour tout  $0 \leq i \leq p-1$  :

$$u(\omega, s_i(\mathbf{x})) = r_i(\omega) u(\alpha_i \omega, \mathbf{x}) \quad \text{pour tout } (\omega, \mathbf{x})$$

Cette proposition nous "incite" à développer la solution au voisinage de  $\omega = 0$ .

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - Un problème modèle
  - **Le problème de Laplace limite**
  - Le problème de Helmholtz
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion



## Géométrie

- $\widehat{\Sigma}$  est la réunion des segments  $[M^* N^*]$  et  $[N^* M_i]$ , avec  $0 \leq i \leq p-1$ ,
- $s_i(M^*) = M_i$ , pour tout  $0 \leq i \leq p-1$ , et  $s_i((M^* N^*))$  est parallèle à  $(N^* M_i)$
- $\mu = 1$  sur  $[M^* N^*]$  et  $\mu = \mu_i$ , pour tout  $0 \leq i \leq p-1$  ( $\mu$  est donc continue aux points  $M_i$ )

## Espaces fonctionnels

$$\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{R}) = \{u \in L_{\text{loc}}^2(\mathcal{R}) / u' \in L_{\mu}^2(\mathcal{R})\}$$

Norme associée

$$\|u\|_{\mathcal{H}_{\mu}^1(\mathcal{R})}^2 = |u(M^*)|^2 + \int_{\mathcal{R}} \mu(x) |u'(x)|^2 dx$$

On définit aussi  $\mathcal{H}_{\mu,c}^1(\mathcal{R})$  et  $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{R})$



Nous regardons le problème suivant : trouver  $u \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{R})$  (ou  $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{R})$ ) avec  $u(M^*) = 1$  tel que

$$\int_{\mathcal{R}} \mu u'(x) \overline{v}'(x) dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{R}) \text{ (ou } \mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{R}) \text{) tel que } v(M^*) = 0$$

### Théorème

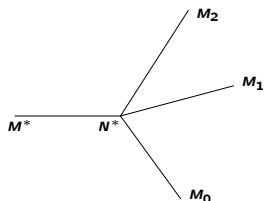
Ce problème est bien posé dans  $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{R})$  et dans  $\mathcal{H}_{\mu,0}^1(\mathcal{R})$ .

*Preuve :* Pour les fonctions  $v$  satisfaisant  $v(M^*) = 0$ , la forme bilinéaire du problème ci-dessus est le produit scalaire associé à la norme définie sur  $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{R})$ .

### Propositions

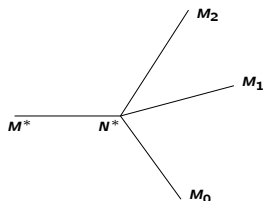
- Il existe des nombres complexes  $(r_i)_{0 \leq i \leq p-1}$  tels que pour tout  $0 \leq i \leq p-1$ , pour tout  $x \in \mathcal{R}$ , on a  $u(s_i(x)) = r_i u(x)$ .
- La solution du problème dans  $\mathcal{H}_\mu^1(\mathcal{R})$  est la fonction constante.

Le problème de Laplace est équivalent au problème suivant : trouver  $(u, r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda) \in H_{\mu}^1(\widehat{\Sigma}) \times \mathbb{C}^{p+1}$  tels que



$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu u')' = 0 \quad \text{sur chaque segment } [N^* M] \\ [\mu u'] = 0 \quad \text{en } N^* \\ u(M^*) = 1 \\ u'(M^*) = \lambda \\ u(M_i) = r_i \quad 0 \leq i \leq p-1 \\ u'(M_i) = \lambda r_i \alpha_i^{-1} \quad 0 \leq i \leq p-1 \\ \lambda \leq 0 \end{array} \right.$$

Le problème de Laplace est équivalent au problème suivant : trouver  $(u, r_0, r_1, \dots, r_{p-1}, \lambda) \in H_{\mu}^1(\widehat{\Sigma}) \times \mathbb{C}^{p+1}$  tels que



$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu u')' = 0 \quad \text{sur chaque segment } [N^* M] \\ [\mu u'] = 0 \quad \text{en } N^* \\ u(M^*) = 1 \\ u'(M^*) = \lambda \\ u(M_i) = r_i \quad 0 \leq i \leq p-1 \\ u'(M_i) = \lambda r_i \alpha_i^{-1} \quad 0 \leq i \leq p-1 \\ \lambda \leq 0 \end{array} \right.$$

## Proposition

Ce problème admet deux solutions, distinctes si et seulement si  $\sum \mu_i / \alpha_i > 1$

## Formule

$\lambda$  est la racine strictement négative de la fonction

$$f : \nu \mapsto 1 - \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{L^* \nu + 1}{\alpha_i - L_i \nu}$$

*Note* : cette fonction admet une racine strictement négative si et seulement si  $\sum \mu_i / \alpha_i > 1$

## Formule

$\lambda$  est la racine strictement négative de la fonction

$$f : \nu \mapsto 1 - \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{L^* \nu + 1}{\alpha_i - L_i \nu}$$

*Note* : cette fonction admet une racine strictement négative si et seulement si  $\sum \mu_i / \alpha_i > 1$

Heureusement, on sait calculer  $\lambda$  dans certains cas particuliers :

## Cas symétrique

$L_i$ ,  $\alpha_i$  et  $\mu_i$  ne dépendent pas de  $i$ .

$$\lambda = \frac{\alpha_i - p\mu_i}{p\mu_i L^* + L_i}$$

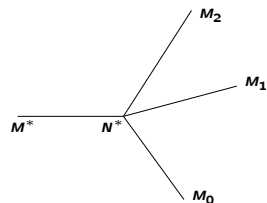
## Cas dégénéré

$L_i = 0$  pour tout  $i$

$$\lambda = \frac{1 - \sum \mu_i / \alpha_i}{L^* \sum \mu_i / \alpha_i}$$

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - Un problème modèle
  - Le problème de Laplace limite
  - **Le problème de Helmholtz**
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion

Le problème de Helmholtz est équivalent au problème suivant : trouver  $(u(\omega, \mathbf{x}), r_0(\omega), r_1(\omega), \dots, r_{p-1}(\omega), \lambda(\omega))$  tels que

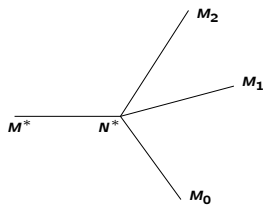


$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu u')' + \omega^2 \mu u = 0 \quad \text{sur chaque segment } [N^* M] \\ [\mu u'] = 0 \quad \text{en } N^* \\ u(M^*) = 1 \\ u'(M^*) = \lambda(\omega) \\ u(M_i) = r_i(\omega) \quad 0 \leq i \leq p-1 \\ u'(M_i) = \lambda(\alpha_i \omega) r_i(\omega) \alpha_i^{-1} \quad 0 \leq i \leq p-1 \end{array} \right.$$

+ une condition de norme finie sur la solution reconstruite sur  $\mathcal{R}$

## Restriction à un domaine borné

Le problème de Helmholtz est équivalent au problème suivant : trouver  $(u(\omega, \mathbf{x}), r_0(\omega), r_1(\omega), \dots, r_{p-1}(\omega), \lambda(\omega))$  tels que



The diagram shows a central node  $N^*$  connected to three segments:  $M_0$  (bottom right),  $M_1$  (top right), and  $M_2$  (top left). A horizontal segment  $M^*$  is attached to the left of  $N^*$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu u')' + \omega^2 \mu u = 0 \quad \text{sur chaque segment } [N^* M] \\ [\mu u'] = 0 \quad \text{en } N^* \\ u(M^*) = 1 \\ u'(M^*) = \lambda(\omega) \\ u(M_i) = r_i(\omega) \quad 0 \leq i \leq p-1 \\ u'(M_i) = \lambda(\alpha_i \omega) r_i(\omega) \alpha_i^{-1} \quad 0 \leq i \leq p-1 \end{array} \right.$$

+ une condition de norme finie sur la solution reconstruite sur  $\mathcal{R}$

### Relations fonctionnelles

Après calculs,  $\lambda$  et  $r_i$  vérifient les relations fonctionnelles suivantes :

$$\frac{\lambda(\omega) \cos(\omega L^*) - \omega \sin(\omega L^*)}{\cos(\omega L^*) + \lambda(\omega) \omega^{-1} \sin(\omega L^*)} = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{\lambda(\alpha_i \omega) \alpha_i^{-1} \cos(\omega L_i) + \omega \sin(\omega L_i)}{\cos(\omega L_i) - \lambda(\alpha_i \omega) (\alpha_i \omega)^{-1} \sin(\omega L_i)}$$

$$r_i(\omega) = \frac{\cos(\omega L^*) + \lambda(\omega) \omega^{-1} \sin(\omega L^*)}{\cos(\omega L_i) - \lambda(\alpha_i \omega) (\alpha_i \omega)^{-1} \sin(\omega L_i)}$$



## Rappel de la relation fonctionnelle sur $\lambda$

$$\frac{\lambda(\omega) \cos(\omega L^*) - \omega \sin(\omega L^*)}{\cos(\omega L^*) + \lambda(\omega) \omega^{-1} \sin(\omega L^*)} = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{\lambda(\alpha_i \omega) \alpha_i^{-1} \cos(\omega L_i) + \omega \sin(\omega L_i)}{\cos(\omega L_i) - \lambda(\alpha_i \omega) (\alpha_i \omega)^{-1} \sin(\omega L_i)}$$

## Rappel de la relation fonctionnelle sur $\lambda$

$$\frac{\lambda(\omega) \cos(\omega L^*) - \omega \sin(\omega L^*)}{\cos(\omega L^*) + \lambda(\omega) \omega^{-1} \sin(\omega L^*)} = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{\lambda(\alpha_i \omega) \alpha_i^{-1} \cos(\omega L_i) + \omega \sin(\omega L_i)}{\cos(\omega L_i) - \lambda(\alpha_i \omega) (\alpha_i \omega)^{-1} \sin(\omega L_i)}$$

- $\lambda$  est une fonction paire par rapport à  $\omega$
- Quand  $\omega \rightarrow 0$ , formellement nous avons

$$\frac{\lambda(0)}{1 + \lambda(0)L^*} = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{\lambda(0) \alpha_i^{-1}}{1 - \lambda(0) \alpha_i^{-1} L_i} \iff \lambda(0) \left( 1 - \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i \frac{L^* \lambda(0) + 1}{\alpha_i - L_i \lambda(0)} \right) = 0$$

$\lambda(0)$  vérifie la même équation que pour le problème de Laplace.

Le fait que  $\lambda$  soit paire /  $\omega$  nous donne

$$\lambda(\omega) = \lambda_0 + \lambda_2 \omega^2 + O(\omega^4)$$

## Cas Neumann

$$\lambda_0 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{L^* + \sum \mu_i L_i}{1 - \sum \mu_i \alpha_i}$$

## Cas Dirichlet dégénéré

$$\lambda_0 = \frac{1 - \sum \mu_i / \alpha_i}{L^* \sum \mu_i / \alpha_i}$$

$$\lambda_2 = \frac{L^* (1 + \sum \mu_i / \alpha_i + (\sum \mu_i / \alpha_i)^2)}{3 ((\sum \mu_i / \alpha_i)^2 - \sum \mu_i \alpha_i)}$$

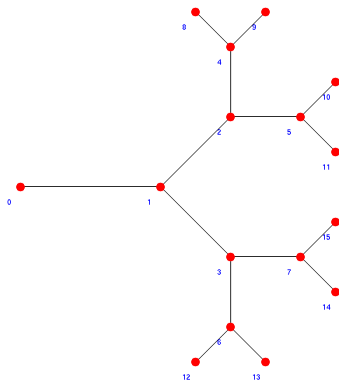
## Cas Dirichlet (général)

Pour l'instant, on n'a pas d'écriture explicite de  $\lambda_0$ , mais il est possible d'expliciter  $\lambda_2$  en fonction de  $\lambda_0$ .

## Question ouverte

Quel(s) développement(s) convienn(e)nt? Le problème de Helmholtz admet deux solutions (éventuellement identiques) : une dans  $H_\mu^1(\mathcal{R})$  et une dans  $H_{\mu,0}^1(\mathcal{R})$ .

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - Un problème modèle
  - Le problème de Laplace limite
  - Le problème de Helmholtz
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion



## Problème et conditions initiales

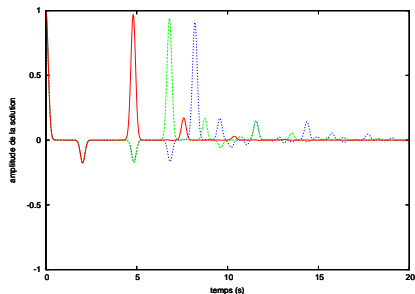
- On résout l'équation des ondes sur le graphe donné à gauche, avec une condition d'onde sortante au noeud 0 et une condition de Dirichlet (ou Neumann) aux noeuds 8-15.
- Donnée initiale : une gaussienne centrée au milieu du segment  $[0-1]$  se déplaçant vers la droite.

## Résultats

- Évolution au cours du temps avec la condition de Neumann : **normal** et **saturé**
- Évolution au cours du temps avec la condition de Dirichlet : **normal** et **saturé**

Tracé de la solution au milieu du segment [0-1] comme une fonction du temps (condition d'onde absorbante au noeud 0)

- En **rouge** : arbre limité aux noeuds 0-3, condition de Neumann aux noeuds 2-3,
- En **vert** : arbre limité aux noeuds 0-7, condition de Neumann aux noeuds 4-7,
- En **bleu** : arbre complet, condition de Neumann aux noeuds 8-15

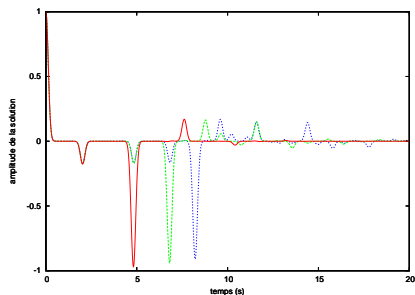


Constat : quand le nombre de générations augmente :

- on observe de plus en plus de réflexions du premier ordre,
- l'amplitude de la dernière réflexion du premier ordre diminue

Tracé de la solution au milieu du segment [0-1] comme une fonction du temps (condition d'onde absorbante au noeud 0)

- En **rouge** : arbre limité aux noeuds 0-3, condition de Dirichlet aux noeuds 2-3,
- En **vert** : arbre limité aux noeuds 0-7, condition de Dirichlet aux noeuds 4-7,
- En **bleu** : arbre complet, condition de Dirichlet aux noeuds 8-15



Constat : quand le nombre de générations augmente :

- on observe de plus en plus de réflexions du premier ordre,
- l'amplitude de la dernière réflexion du premier ordre diminue

- 1 Introduction
- 2 Étude théorique du problème
  - Notations
  - Un problème modèle
  - Le problème de Laplace limite
  - Le problème de Helmholtz
- 3 Résultats numériques
- 4 Conclusion



- La fonction  $\omega \mapsto \lambda(\omega)$  est bien définie lorsque  $\Im(\omega) > 0$ .  
⇒ que se passe-t-il quand  $\Im(\omega) = 0$  (propagation sans absorption) ?
- Les calculs présentés ont été justifiés pour le cas de l'équation de Laplace.  
⇒ Justification pour Helmholtz ?
- Le traitement aux noeuds se fait avec des conditions de Kirchoff "classiques".  
⇒ Quid des conditions de Kirchoff "améliorées" ?