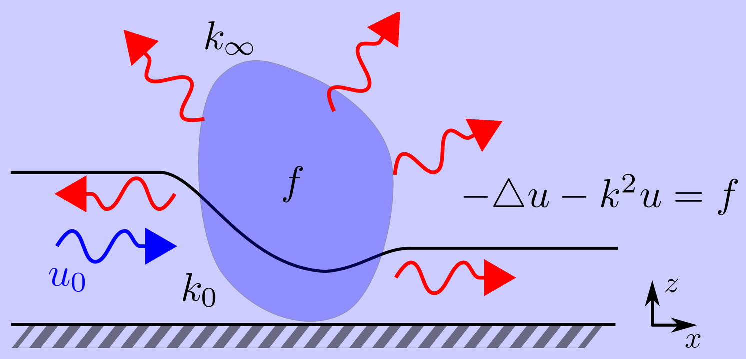
Analyse mathématique de la jonction de deux guides d'ondes ouverts

Benjamin Goursaud (POEMS)

Anne-Sophie Bonnet-BenDhia, Christophe Hazard

Position du problème

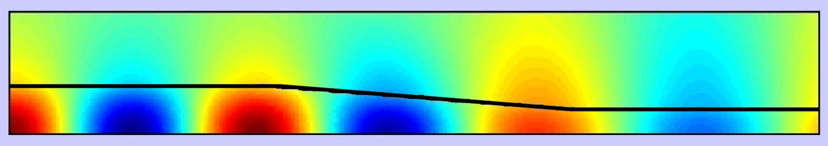
Problème modèle



- Régime harmonique ($e^{-i\omega t}$).
- $k_0 > k_\infty$: présence d'ondes guidées dans les deux guides d'ondes.

Dans la suite, par soucis de simplicité, sans onde incidente ($u_0 = 0$).

☞Question : quelles sont les conditions de rayonnement ?



Un exemple de transition adiabatique pour le mode fondamental.

Motivation

- Application principale en optique intégrée : jonction entre une fibre optique et un micro-guide.
- Autres cadres d'application, par exemple en élasticité : jonction de câbles enfouis.

Cas similaires dans la littérature

- Surfaces rugueuses : problématique similaire mais absence d'ondes guidées [1].
- Diffraction par un défaut dans un guide ouvert droit [2, 3, 4].

☞Aucun article sur la jonction de guides ouverts.

Conditions de rayonnement modales

L'idée

En dehors de la perturbation, la géométrie est celle d'un guide droit. L'idée est d'utiliser la **décomposition sur les modes** du guide droit afin de distinguer l'onde sortante dans la direction longitudinale.

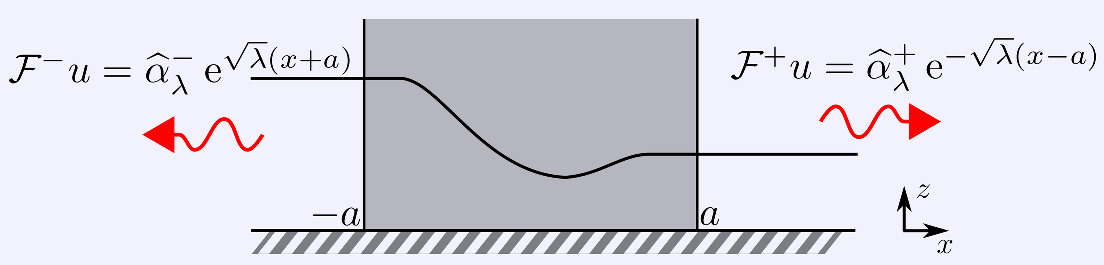
L'outil mathématique : **la transformation de Fourier généralisée $\mathcal{F}$.**

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,z) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,z) - k^2(z)\,u(x,z) = 0$$

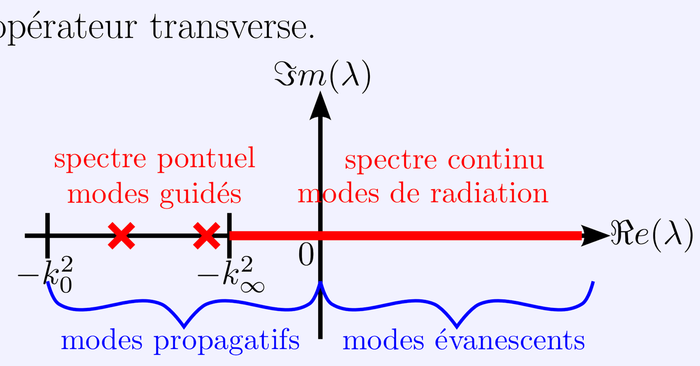
trans. Fourier gén. $\mathcal{F}$

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{F}u}{\partial x^2}(x,\lambda) + \lambda\,\mathcal{F}u(x,\lambda) = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{F}u(x,\lambda) = \underbrace{\widehat{a}_\lambda\, e^{+\sqrt{\lambda}\,x}}_{\text{mode allant vers la gauche}} + \underbrace{\widehat{b}_\lambda\, e^{-\sqrt{\lambda}\,x}}_{\text{mode allant vers la droite}}.$$



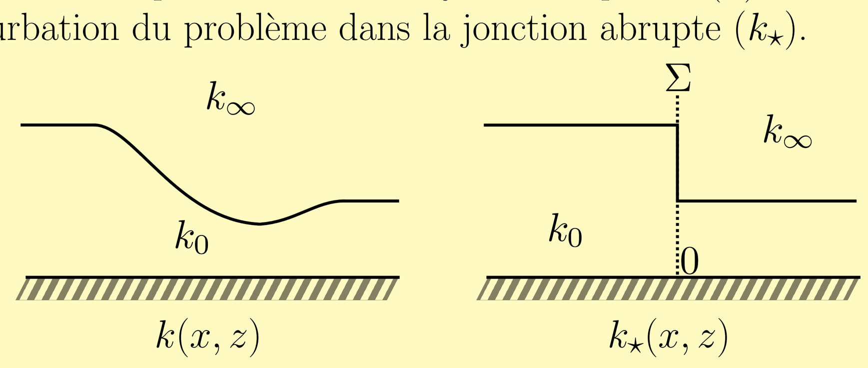
λ : variable spectrale vit dans Λ, le spectre de l'opérateur transverse.



Reformulation sous la forme d'une équation de type Lippmann-Schwinger

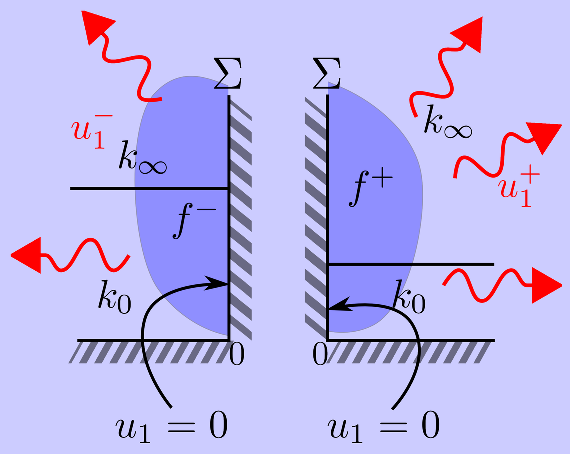
L'idée

Reformuler le problème dans la jonction épaisse (k) comme une perturbation du problème dans la jonction abrupte ($k_\star$).



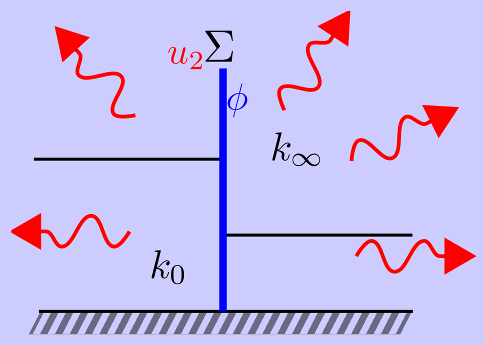
Le problème de la jonction abrupte est traité en décomposant : $u_\star = u_1 + u_2$.

Problème découplé : u_1



Problèmes découplés bien posés : existence et unicité de $u_1^\pm$ [4].

Problème couplé : u_2



$$[u_2]_\Sigma = 0 \qquad \left[\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]_\Sigma = -\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]_\Sigma$$

$u_2^\pm = (\mathcal{F}^\pm)^{-1}(\mathcal{F}^\pm\phi\, e^{-\sqrt{\lambda}|x|})$ où ϕ est solution de

$$(\mathcal{F}^-)^{-1}(\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^-\phi) + (\mathcal{F}^+)^{-1}(\sqrt{\lambda}\,\mathcal{F}^+\phi) = \left[\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]_\Sigma.$$

Cette équation admet une unique solution [5].

Solution dans la jonction abrupte : $u_\star = T_\star f$.

Solution dans la jonction épaisse : **équation de Lippmann-Schwinger** : $\boxed{(I - T_\star(k^2 - k_\star^2))u = T_\star f,}$ qui relève de l'**alternative de Fredholm**.

☞Il suffit donc de montrer l'unicité du problème.

Unicité

Soit u solution du problème homogène. On veut montrer que pour $|x| \geq a$, $u(x,z) = 0$ (par principe de prolongement unique, $u = 0$). 3 étapes :

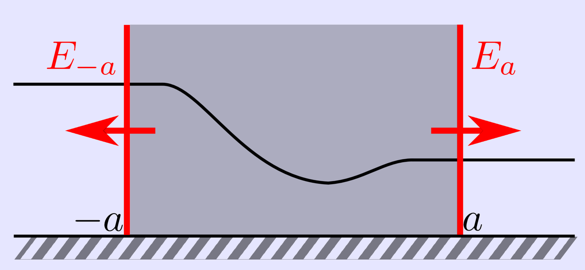
① Annulation des composantes propagatives

On montre que pour $|x| \geq a$, les composantes propagatives sont nulles :

$$\boxed{\forall \pm x \geq a, \forall \lambda \in \Lambda^\pm \cap \mathbb{R}^-, \mathcal{F}^\pm u(x,\lambda) = 0.}$$

L'outil : le flux d'énergie sortant est nul : $E_a + E_{-a} = 0$, où

$$E_{\pm a} = \Im m \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial u}{\partial |x|}(\pm a, z)\, \overline{u(\pm a, z)}\, dz.$$



② Décroissance de u et de ses dérivées

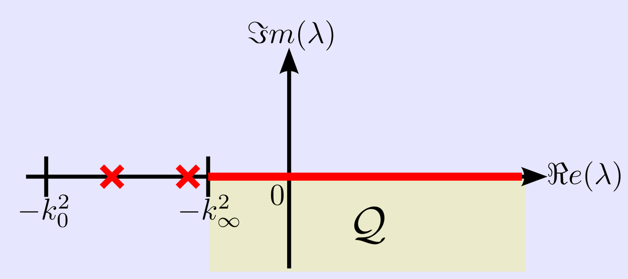
On montre que $u|_\Sigma$ et ses dérivées par rapport à x sont plus décroissantes que n'importe quel polynôme en $1/z$ à l'infini.

$$\text{Ainsi, en particulier, } \boxed{u|_\Sigma \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}|_\Sigma \text{ sont dans } L^1(\mathbb{R}^+).}$$

À partir de ①, et avec la transformée de Fourier généralisée dans la direction z, on obtient de la décroissance en x.

L'idée : renverser le point de vue : utiliser la transformée de Fourier standard dans la direction x pour obtenir de la décroissance en z, en regardant dans une direction oblique (via un argument de phase stationnaire).

③ Analyticité dans la variable spectrale



On montre que, pour $\pm x \geq a$,

$$\boxed{\mathcal{F}^\pm u, \text{ se prolonge en une fonction analytique dans } \mathcal{Q}.}$$

$$\mathcal{F}^\pm u = \mathcal{F}^\pm u_1 + \mathcal{F}^\pm u_2$$

« facile » : [4].

« difficile » : utilise un résultat de transfert d'analyticité entre $\mathcal{F}^-$ et $\mathcal{F}^+$, valable pour des fonctions $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Références

[1] S.N. Chandler-Wilde and B. Zhang, *Electromagnetic scattering by a inhomogeneous conducting or dielectric layer on a perfectly conducting plate*, Proc. R. Soc. Lond. A, 454 (1998), pp. 519–542.

[2] Y. Xu, *Scattering of acoustic waves by an obstacle in a stratified medium*, In Partial Differential Equation with Real Analysis, H. Begehr and A. Jeffrey, eds., Pitman Research Notes in Mathematics, 263, Longman, Essex, pp. 147–168.

[3] R. Magnanini and F. Santosa, *Wave propagation in a 2D- optical waveguide*, SIAM J. Appl. Math., 61 (2000), pp. 1237-1252.

[4] A.S. Bonnet-BenDhia, L. Chorfi, G. Dakhia and C. Hazard, *Diffraction by a defect in an open waveguide : a mathematical analysis based on a modal radiation condition*, SIAM J. Appl. Math., 70 (2009), pp. 677–693.

[5] A.S. Bonnet-BenDhia and A. Tillequin, *A generalized mode matching method for the junction of open waveguides*, SIAM, Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (2000), pp. 399–403.

benjamin.goursaud@ensta.fr