Une méthode level-set pour résoudre le problème inverse de l'obstacle

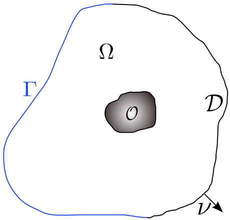
Jérémi Dardé, Laurent Bourgeois

Laboratoire Jacques-Louis Lions-Paris 7/ Laboratoire POEMS-Ensta

19/05/2010

Problème inverse de l'obstacle

- $\mathcal{O} \Subset \mathcal{D}$ ($\partial\mathcal{D}$ lipschitzien, $\partial\mathcal{O}$ continu)
- $\Gamma \subset \partial\mathcal{D}$, $|\Gamma| \neq 0$
- $\Omega := \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}}$ connexe.

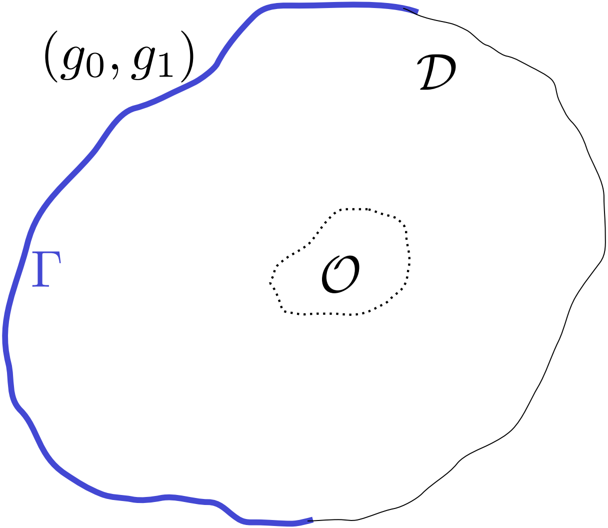


Soit $A \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ t.q. $\xi^T A\xi \geq \alpha > 0$ p.p. dans Ω, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

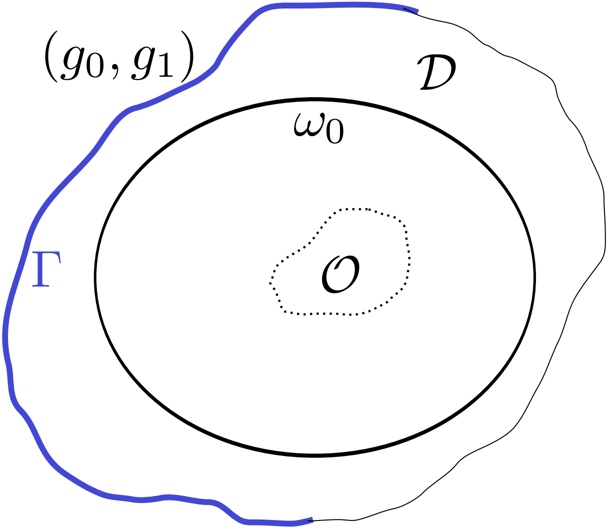
`Problème inverse de l'obstacle` : pour $(g_0, g_1) \neq (0,0)$, trouver $\mathcal{O}$ et $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \operatorname{div}(A\nabla u) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ u & = & g_0 & \text{sur } \Gamma \\ A\nabla u.\nu & = & g_1 & \text{sur } \Gamma \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\mathcal{O} \end{array} \right.$$

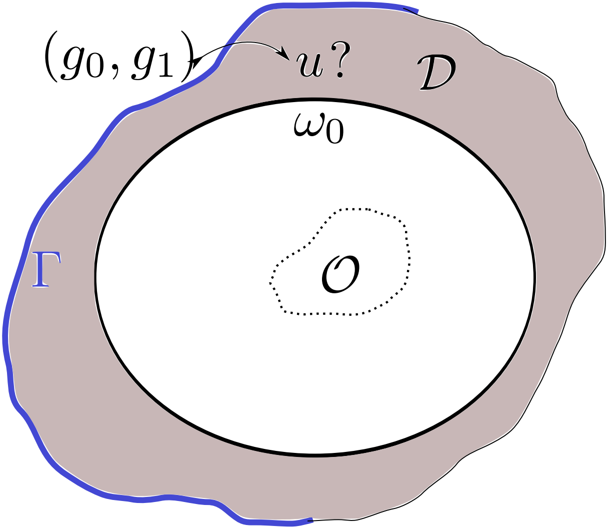
Stratégie



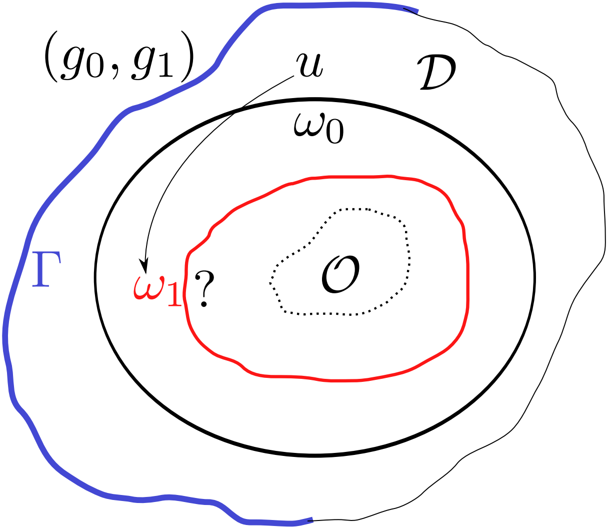
Stratégie



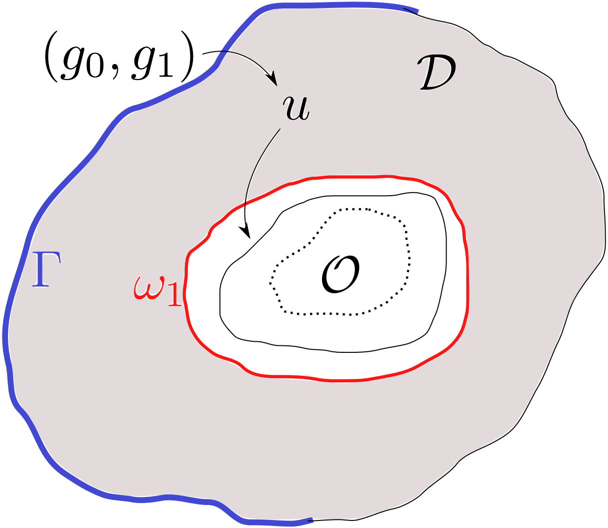
Stratégie



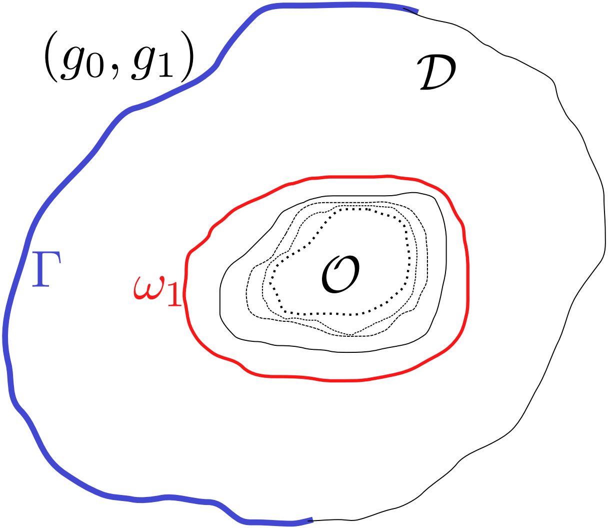
Stratégie



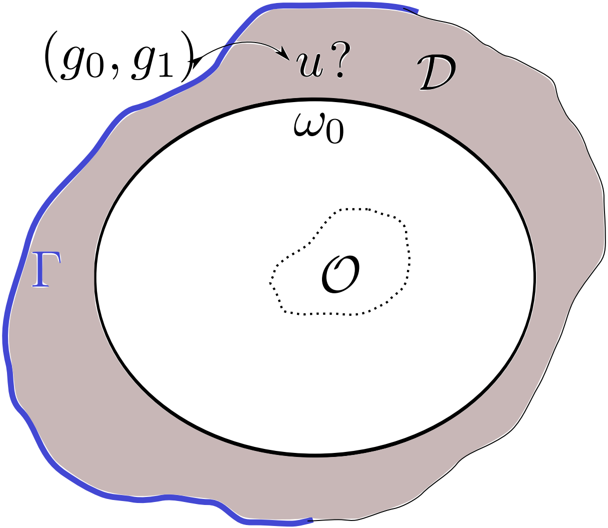
Stratégie



Stratégie



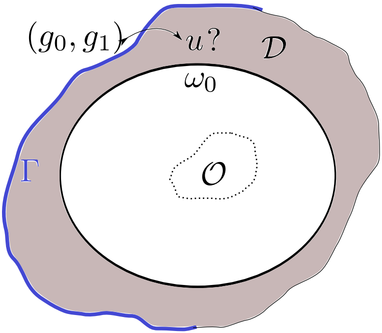
Première étape



Problème de Cauchy

On cherche $u \in H^2(\mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_0)$ t.q.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{div}(A\nabla u) & = & 0 \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_0 \\ u & = & g_0 \text{ sur } \Gamma \\ A\nabla u.\nu & = & g_1 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$



Problème mal posé : unicité de la solution, mais pas forcément existence. <u>u ne dépend pas continûment de (g_0, g_1)</u>.

Méthode de quasi-réversibilité [QR]

Problème de quasi-réversibilité :

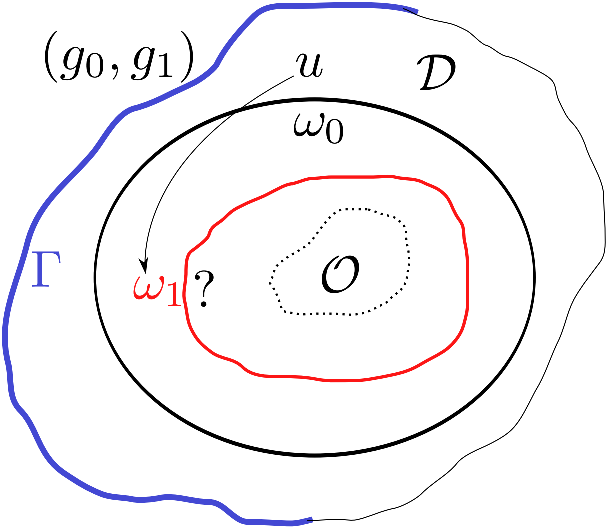
soit $\varepsilon > 0$. On cherche $u_\varepsilon \in H^2(\mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_0)$, $u_\varepsilon = g_0$ et $A\nabla u_\varepsilon.\nu = g_1$ sur Γ t.q. $\forall v \in H^2(\mathcal{D} \setminus \overline{\omega}_0)$, $v = A\nabla v.\nu = 0$ sur Γ :

$$(\mathrm{div}(A\nabla u_\varepsilon), \mathrm{div}(A\nabla v))_{L^2(\mathcal{D}\setminus\overline{\omega}_0)} + \varepsilon\,(u_\varepsilon, v)_{H^2(\mathcal{D}\setminus\overline{\omega}_0)} = 0$$

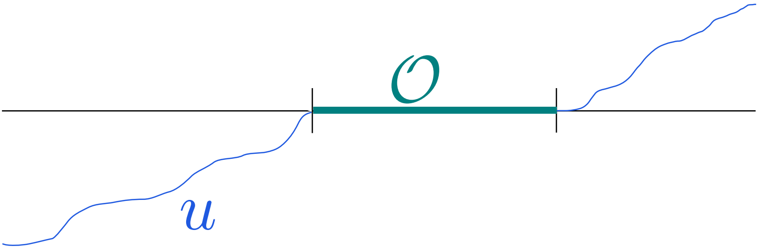
Théorème : le problème [QR] admet une unique solution u_ε et

$$\boxed{u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{H^2} u}$$

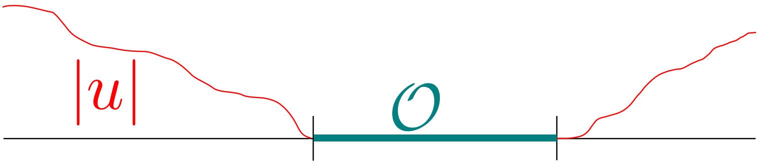
Deuxième étape



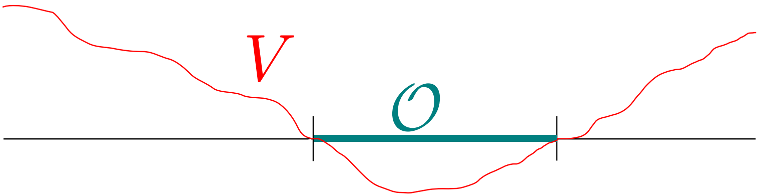
Cas 1-d



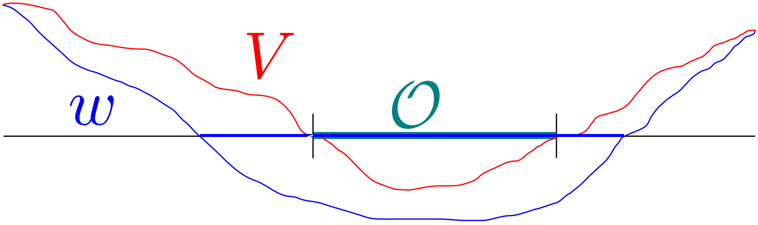
Cas 1-d



Cas 1-d



Cas 1-d



Construction de ω_1

Principe du maximum faible : soit $\mathcal{V}$ ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$. Si $u \in H_0^1(\mathcal{V})$ vérifie $\Delta u \geq 0$, alors $u \leq 0$ p.p. dans $\mathcal{V}$

On définit :

- $V := \left\{ \begin{array}{l} |u| \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ V \in H_0^1(\mathcal{O})^- \end{array} \right. \Rightarrow V \in H^1(\mathcal{D})$
- $f \geq \Delta V$
- w_{ω_0} unique solution du problème $[\mathrm{P}]$ $\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_{\omega_0} = f \text{ dans } \omega_0 \\ w_{\omega_0} - V \in H_0^1(\omega_0) \end{array} \right.$
- $\omega_1 := \{x \in \omega_0 \mid w_{\omega_0}(x) < 0\} \Rightarrow \mathcal{O} \subset \omega_1 \subset \omega_0.$

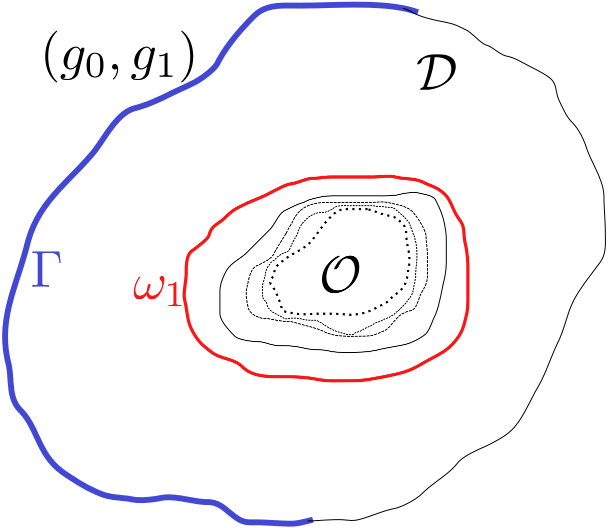
Construction de ω_1

Principe du maximum faible : soit $\mathcal{V}$ ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$. Si $u \in H_0^1(\mathcal{V})$ vérifie $\Delta u \geq 0$, alors $u \leq 0$ p.p. dans $\mathcal{V}$

On définit :

- $V := \begin{cases} |u| \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ V \in H_0^1(\mathcal{O})^- \end{cases} \Rightarrow V \in H^1(\mathcal{D})$
- $f \geq \Delta V$
- w_{ω_0} unique solution du problème [P] $\begin{cases} \Delta w_{\omega_0} = f \text{ dans } \omega_0 \\ w_{\omega_0} = |u| \text{ sur } \partial\omega_0 \end{cases}$
- $\omega_1 := \{x \in \omega_0 \mid w_{\omega_0}(x) < 0\} \Rightarrow \mathcal{O} \subset \omega_1 \subset \omega_0$.

Troisième étape



Résolution du problème

Suite d'ouverts : $\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 \mid \mathcal{O} \subset \omega_0 \\ \forall m \in \mathbb{N},\ \omega_{m+1} = \{x \in \omega_m \text{ t.q. } w_{\omega_m}(x) < 0\} \end{array} \right.$

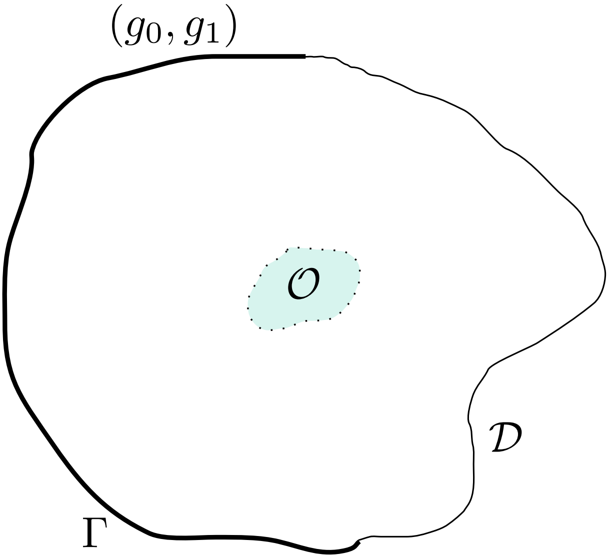
Propriété : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O} \subset \omega_{m+1} \subset \omega_m$.

Propriété : $\omega_m \xrightarrow{m\to\infty} \omega := \overbrace{\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \omega_m}^{\circ}$, $\mathcal{O} \subset \omega$.

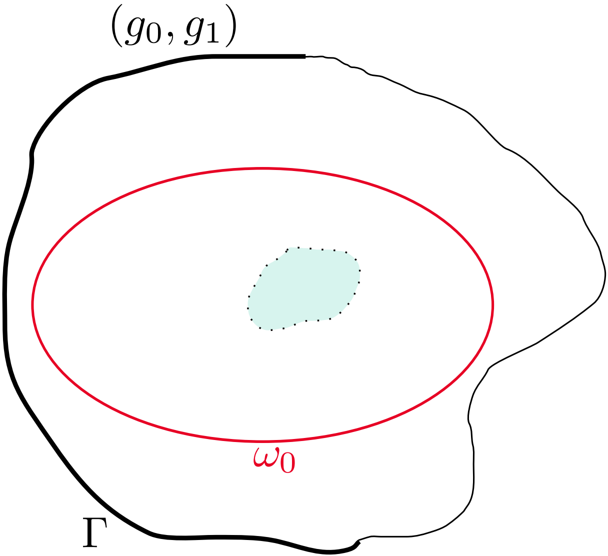
[H] : $w_{\omega_m} \xrightarrow{m\to\infty} w_\omega$ dans $L^2(\omega)$.

Théorème : $\omega = \mathcal{O}$.

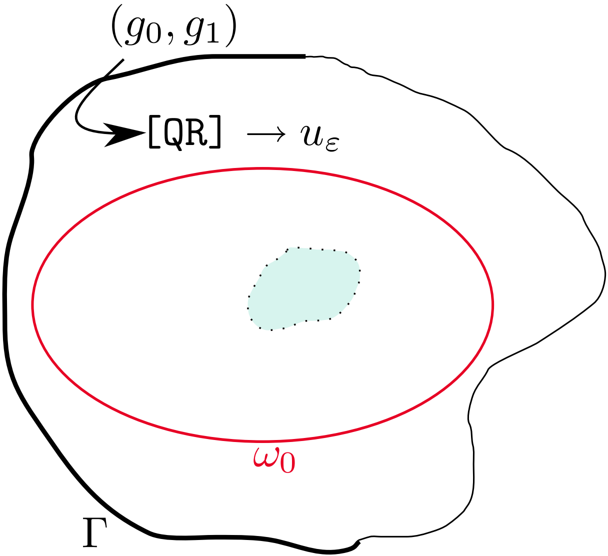
Algorithme



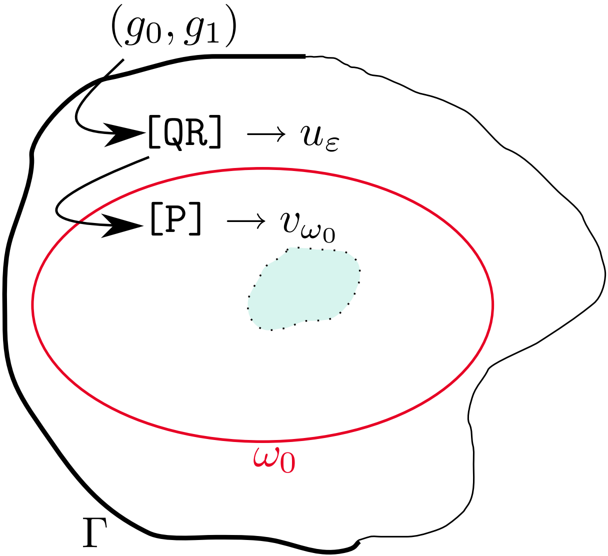
Algorithme



Algorithme

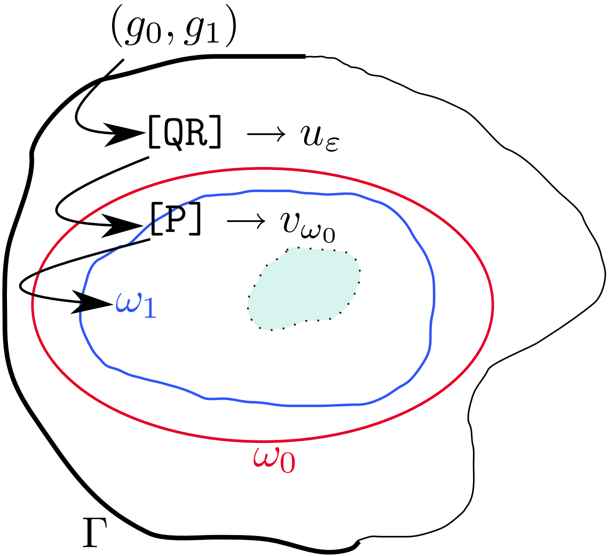


Algorithme

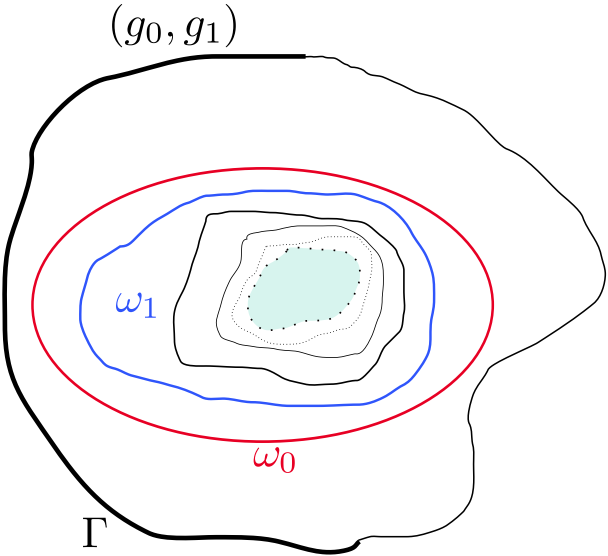


(g_0, g_1)
[QR] $\rightarrow u_\varepsilon$
[P] $\rightarrow v_{\omega_0}$
ω_0
Γ

Algorithme

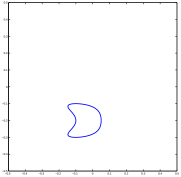


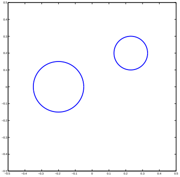
Algorithme



Résultats numériques : cas de l'opérateur Δ

Dans nos expériences numériques, $\mathcal{D} :=]-0.5, 0.5[\times]-0.5, 0.5[$,
et on s'intéresse à deux obstacles non convexes :

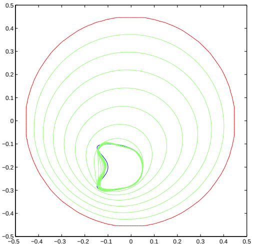


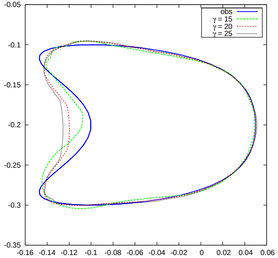


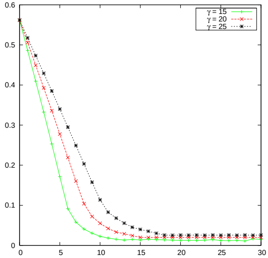
Les données (g_0, g_1) sont obtenus par résolution d'un problème de laplacien.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \text{ dans } \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{O}} \\ \partial_n u & = & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ sur }]-0.5, 0.5[\times\{\pm 0.5\} \\ 0 \text{ sur } \{\pm 0.5\}\times]-0.5, 0.5[\end{array}\right. \\ u & = & 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \end{array}\right.$$

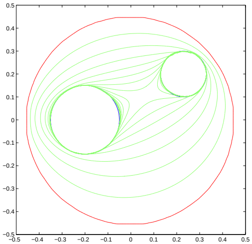
Cas du boomerang, $\Gamma = \partial\mathcal{D}$

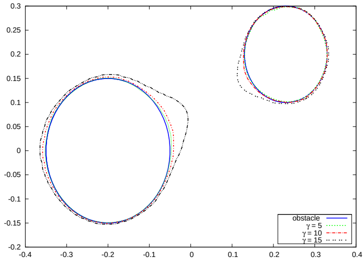


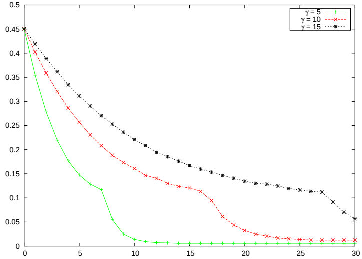




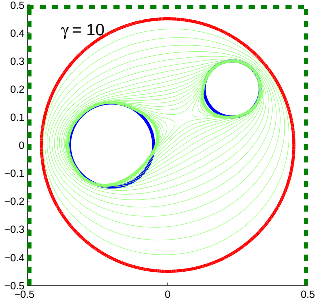
Cas des 2 disques, $\Gamma = \partial\mathcal{D}$

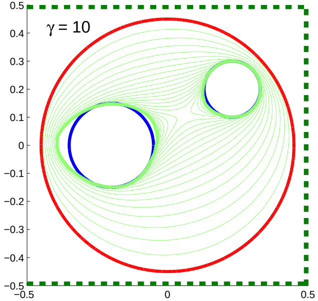






Cas des 2 disques, $\Gamma \neq \partial\mathcal{D}$





Données bruitées

On bruite les données :

$$g_i^\delta := g_i + \delta \frac{\|g_i\|_{L^2}}{\|b_i\|_{L^2}} b_i$$

Pour la méthode `[QR]`, il est nécessaire de

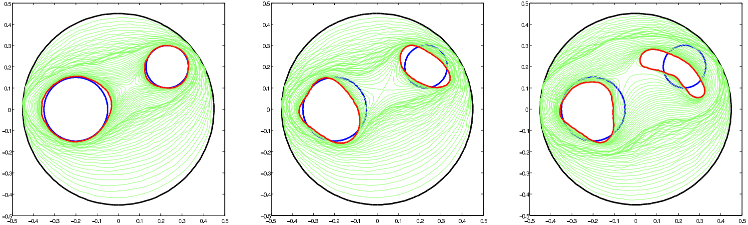
1. régulariser les données bruitées
2. fixer ε en fonction de δ.

Pour faire cela, nous avons développé une méthode basée sur

- le principe de Morozov
- la dualité en optimisation.

A duality-based method of quasi-reversibility in presence of noisy data, L. Bourgeois & J. Dardé, *Inverse problems*, submitted

Obstacle $:=$ 2 disques, $\Gamma = \partial\mathcal{D}$, données bruitées



0 % 2 % 10 %

Conclusion

Avantages de la méthode :

- méthode `[QR]` : $\left\{ \begin{array}{l} \text{pas de problème d'optimisation} \\ \text{données de Cauchy incomplètes : } \boxed{\Gamma \neq \partial \mathcal{D}} \end{array} \right.$
- méthode Level-Set : $\left\{ \begin{array}{l} \text{changements de topologie} \\ \text{maillages non structurés} \end{array} \right.$
- s'adapte à d'autres conditions sur l'obstacle.

Merci de votre attention !